Формулировка уравнений гидродинамики в терминах скобок Намбу

М.В. Курганский

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук, Пыжевский пер. д. 3, 119017 г. Москва (е-мейл: kurgansk@ifaran.ru)

CITES-2011, г. Томск, 07/07/2011

План лекции

- **Введение**
- **Формализм Намбу в классической механике (Nambu 1973); уравнения Эйлера движения свободного твердого тела**
- **Уравнения типа Намбу для установившихся трехмерных течений идеальной жидкости**
- **Формализм Намбу для несжимаемых двумерных и трехмерных течений жидкости с использованием энстрофии и спиральности, соответственно (Névir and Blender 1993)**
- **⇔ Баротропные течения вращающейся сжимаемой жидкости**
- **⇔ Уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска в 3D и 2D случаях**
- **⇔ Уравнения магнитной гидродинамики**

Введение:

A. Gassmann and H.-J. Herzog. Towards a consistent numerical compressible non-hydrostatic model using generalized Hamiltonian tools. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 134(635):1597–1613, 2008.

QUARTERLY JOURNAL OF THE ROYAL METEOROLOGICAL SOCIETY
Q. J. R. Meteorol. Soc. **00**: 1–17 (0000)
Published online in Wiley InterScience
(www.interscience.wiley.com) DOI: 10.1002/qj.000

Towards a consistent numerical compressible nonhydrostatic model using generalized Hamiltonian tools

Almut Gassmann[a]* and Hans-Joachim Herzog[b]
[a]*Max Planck Institute for Meteorology, Hamburg, Germany*
[b]*Deutscher Wetterdienst, Potsdam, Germany*

Abstract: A set of compressible nonhydrostatic equations for a turbulence-averaged model atmosphere comprising dry air and water in three phases plus precipitating fluxes is presented, in which common approximations are introduced in such a way that no inconsistencies occur in the associated budget equations for energy, mass and Ertel's potential vorticity. These conservation properties are a prerequisite for any climate simulation or NWP model.
It is shown that a Poisson bracket form for the ideal fluid part of the full-physics equation set can be found, while turbulent friction and diabatic heating are added as separate 'dissipative' terms. This Poisson bracket is represented as a sum of a two-fold antisymmetric triple bracket (a Nambu bracket represented as helicity bracket) plus two antisymmetric brackets (so-called mass- and thermodynamic bracket of the Poisson type).
The advantage of this approach is that the given conservation properties and the structure of the brackets provide a good strategy for the construction of their discrete analogues. It is shown how discrete brackets are constructed to retain their antisymmetric properties throughout the spatial discretisation process, and a method is demonstrated how the time scheme can also be incorporated in this philosophy.

Введение: классическая механика Гамильтона и скобки Пуассона

Уравнения движения материальной точки (второй закон Ньютона) и интеграл энергии:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dU(x)}{dx} \qquad E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+U(x)$$

Канонические переменные и уравнения Гамильтона:

$$q=x \qquad p=m\frac{dx}{dt} \qquad H\equiv E=\frac{p^2}{2m}+U(q)$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

Теорема Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dq}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{dp}{dt}\right)=0$$

Скобки Пуассона

$$\frac{dq}{dt}=\{q,H\} \qquad \frac{dp}{dt}=\{p,H\}$$

$$\{a,b\}=\frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p}-\frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q} \qquad \frac{dF(q,p)}{dt}=\{F,H\} \Rightarrow \frac{dH}{dt}=\{H,H\}=0$$

Тождество Якоби

$$\{a,\{b,c\}\}+\{b,\{c,a\}\}+\{c,\{a,b\}\}=0 \qquad \frac{d}{dt}\{a,b\}=\left\{\frac{da}{dt},b\right\}+\left\{a,\frac{db}{dt}\right\} \quad (c=H)$$

Обобщенная механика Гамильтона (Yoichiro Nambu 1973)

«Канонические уравнения» Намбу:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)} \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\nabla H\times\nabla G$$

Теорема Лиувилля:

$$\nabla\cdot\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)=\nabla\cdot(\nabla H\times\nabla G)\equiv 0$$

Обобщенные скобки Пуассона, или скобки Намбу

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial(F,H,G)}{\partial(x,y,z)}=\nabla F\cdot(\nabla H\times\nabla G)=\{F,H,G\}$$

$$\frac{dH}{dt}=\{H,H,G\}\equiv 0 \qquad \frac{dG}{dt}=\{G,H,G\}\equiv 0$$

Обобщение на n-мерное фазовое пространство

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i,j,k,\dots,l}\varepsilon_{ijk\dots l}\frac{\partial H_1}{\partial x_j}\frac{\partial H_2}{\partial x_k}\dots\frac{\partial H_{m-1}}{\partial x_l}\equiv\frac{\partial(x_i,H_1,H_2,\dots,H_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial(F,H_1,H_2,\dots H_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}\equiv\{F,H_1,H_2,\dots H_{n-1}\}$$

Обобщенное тождество Якоби

$$\{\{F_1,F_2,\dots,F_n\},H_1,\dots,H_{n-1}\}=\{\{F_1,H_1,\dots H_{n-1}\},F_2,\dots,F_n\}$$
$$+\{F_1,\{F_2,H_1,\dots H_{n-1}\},\dots,F_n\}+\dots+\{F_1,F_2,\dots,\{F_n,H_1,\dots H_{n-1}\}\}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(F_1,F_2,\dots,F_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{\partial\left(\dot{F}_1,F_2,\dots,F_n\right)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}+\frac{\partial\left(F_1,\dot{F}_2\dots,F_n\right)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}+\dots+\frac{\partial\left(F_1,F_2,\dots,\dot{F}_n\right)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

$$F_1,F_2,\dots,F_n=\mathrm{inv}\;\Rightarrow\;F_{n+1}\equiv\{F_1,F_2,\dots,F_n\}=\mathrm{inv}$$

Формулировка Намбу (Nambu 1973) уравнений Эйлера движения свободного твердого тела (гироскопа)

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} M_2 M_3 \qquad \frac{dM_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} M_1 M_3 \qquad \frac{dM_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} M_1 M_2$$

$$G = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} = \mathrm{inv} \qquad H = \mathbf{M}^2/2 \equiv \left(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2\right)/2 = \mathrm{inv}$$

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(M_2,M_3)} \qquad \frac{dM_2}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(M_3,M_1)} \qquad \frac{dM_3}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(M_1,M_2)}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \nabla H \times \nabla G$$

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{\partial(M_i,H,G)}{\partial(M_1,M_2,M_3)} = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H}{\partial M_j} \frac{\partial G}{\partial M_k}$$

Уравнения типа Намбу для установившихся трехмерных течений идеальной несжимаемой жидкости

$$\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\varphi \qquad \boldsymbol{\omega}_a = \nabla\times\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v} = -\nabla B - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho$$

Функция Бернулли:

$$B = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi$$

$$\frac{D}{Dt}\rho \equiv \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = 0 \qquad \frac{D}{Dt}B \equiv \mathbf{v}\cdot\nabla B = 0$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{1}{\Pi_\rho}\left(\nabla\rho\times\nabla B\right) \equiv \frac{1}{\Pi_\rho}\frac{\partial B}{\partial \Pi_\rho}\left(\nabla\rho\times\nabla\Pi_\rho\right)$$

Потенциальный вихрь:

$$\Pi_\rho \equiv \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\rho = f(\rho, B)$$

«Каноническое представление»:

$$B = \frac{\Pi_\rho^2}{2m} + U(\rho) \qquad \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \nabla\tilde{\rho}\times\nabla\Pi_{\tilde{\rho}} \qquad \tilde{\rho} = \rho/\sqrt{m} \qquad \Pi_{\tilde{\rho}} = \Pi_\rho/\sqrt{m}$$

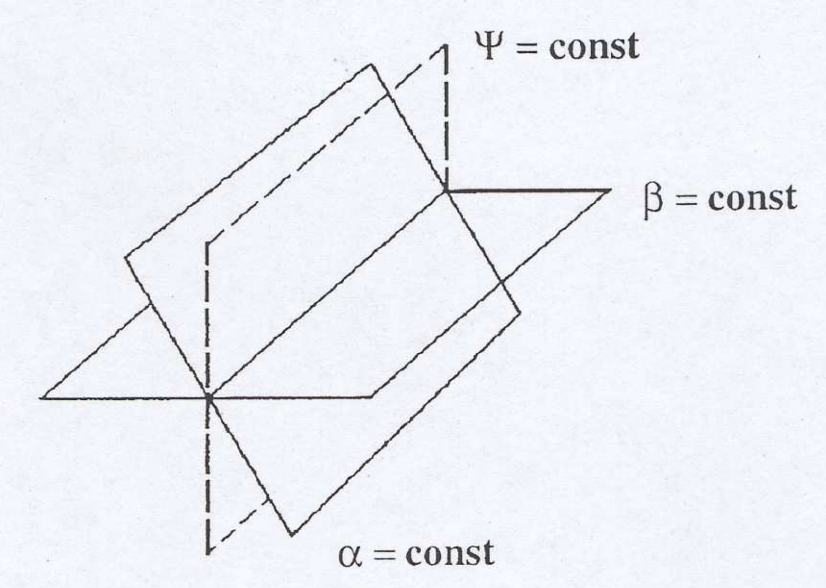
Трассеры и функции тока для установившегося трехмерного течения идеальной жидкости

$$\frac{D}{Dt}\alpha \equiv \mathbf{v}\cdot\nabla\alpha = 0 \qquad \frac{D}{Dt}\beta \equiv \mathbf{v}\cdot\nabla\beta = 0 \qquad \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Неканоническое представление: $\rho\mathbf{v} = \varphi(\alpha,\beta)(\nabla\alpha\times\nabla\beta) \qquad \varphi(\alpha,\beta) = ?$

$$\frac{D}{Dt}\gamma \equiv \mathbf{v}\cdot\nabla\gamma = \Gamma(\mathbf{x}) \qquad \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\gamma = \varphi(\alpha,\beta)(\nabla\alpha\times\nabla\beta)\cdot\nabla\gamma$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{(\nabla\alpha\times\nabla\beta)\cdot\nabla\gamma}(\nabla\alpha\times\nabla\beta)}$$



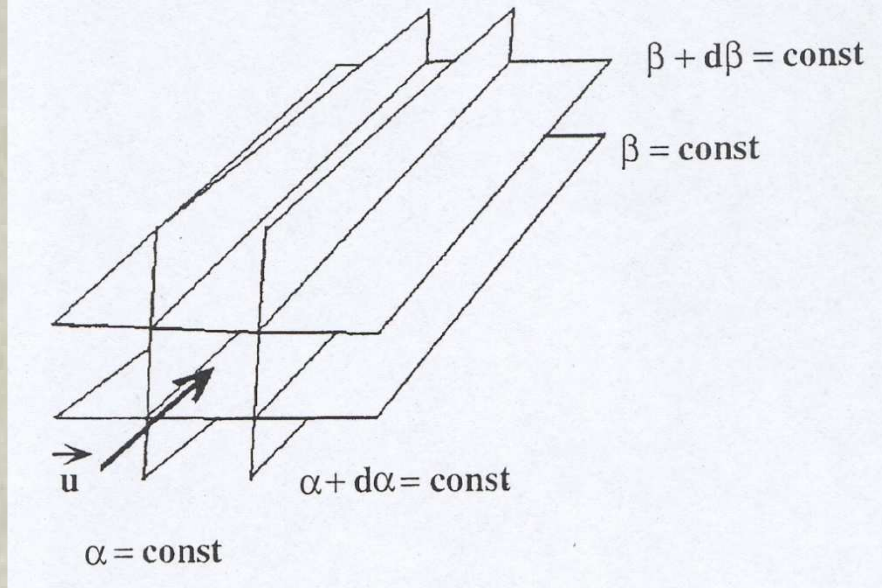


Схема линий тока как пересечений $\alpha, \beta, \Psi, \ldots$ изоповерхностей. Трубка тока (α, β).

Определение «абсолютной скорости» морских течений

Терема Эртеля о вихрях (Ertel 1942) :

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \psi) = \nabla \psi \cdot \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\left(\frac{D\psi}{Dt}\right)$$

$$\frac{D}{Dt}\rho = 0$$

(I) $\psi = \rho$ $\qquad \frac{D}{Dt}\Pi_\rho = 0$

(II) $\psi = \Pi_\rho$ $\qquad \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \Pi_\rho) = \nabla \Pi_\rho \cdot \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \equiv -\frac{\nabla p}{\rho^2} \cdot (\nabla \rho \times \nabla \Pi_\rho)$

Установившееся течение жидкости:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Pi_{\Pi_\rho} = -\frac{\nabla p}{\rho^2} \cdot (\nabla \rho \times \nabla \Pi_\rho) \qquad \alpha = \rho, \beta = \Pi_\rho, \gamma = \Pi_{\Pi_\rho}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla\left(\frac{p}{\rho^2}\right) \cdot \nabla \rho \times \nabla \Pi_\rho}{\nabla \Pi_{\Pi_\rho} \cdot \nabla \rho \times \nabla \Pi_\rho}(\nabla \rho \times \nabla \Pi_\rho)$$

Needler 1985

Kurgansky, Budillon, Salusti 2002

Двумерные уравнения Эйлера (Гамильтонов формализм)

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta,\psi)} \qquad \zeta = \nabla^2\psi$$

Энергия: $$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int (\nabla\psi)^2 d\sigma \equiv -\frac{1}{2}\int \psi\zeta\, d\sigma = \mathrm{inv}$$

$$\delta\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\int\left(\delta\psi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\delta\psi\right)d\sigma = -\int\psi\nabla^2\delta\psi\, d\sigma = -\int\psi\,\delta\zeta\, d\sigma \qquad -\psi = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}$$

$$\mathcal{F}[\zeta] = \int\Phi(\zeta)d\sigma \qquad \boxed{\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_{\zeta,\zeta} \equiv \int \zeta\, J\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)d\sigma} \qquad N.B.: \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = \ldots$$

Скобка Ли–Пуассона (см. Sophus Lie)

Аннуляторы скобок Пуассона, или функционалы (инварианты) Казимира, или казимиры (см. Hendrik Casimir)

$$C: \quad \{\mathcal{F}, C\} \equiv 0$$

$$\{C,\mathcal{H}\} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dC}{dt} = 0$$

$$C[\zeta] = \int f(\zeta)d\sigma \qquad \frac{dC}{dt} = -\int \zeta\, J\left(f'(\zeta), \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)d\sigma \equiv \int\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta} J(f'(\zeta), \zeta)\, d\sigma = 0$$

Двумерные уравнения Эйлера (формализм Намбу; Névir & Blender 1993)

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \psi)} \qquad \zeta = \nabla^2 \psi$$

Энергия: $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int (\nabla \psi)^2 d\sigma = \mathrm{inv}$ **Энстрофия:** $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int \zeta^2 \, d\sigma = \mathrm{inv}$

$$-\psi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta} \qquad \zeta = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \psi) \equiv J(-\psi, \zeta) \equiv J\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta}, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}\right)$$

$$\mathcal{F}[\zeta] = \int \Phi(\zeta) d\sigma \qquad \boxed{\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\zeta,\zeta,\zeta} \equiv \int \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \zeta} J\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta}, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \zeta}\right) d\sigma}$$

Практические применения: якобиан Аракавы (Arakawa 1966; см. также Salmon 2005, 2007)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=J(\zeta,\psi)\equiv\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{1}{3}\left[\delta_{2\Delta x}\zeta\,\delta_{2\Delta y}\psi-\delta_{2\Delta y}\zeta\,\delta_{2\Delta x}\psi+\delta_{2\Delta x}\left(\zeta\,\delta_{2\Delta y}\psi\right)-\delta_{2\Delta y}\left(\zeta\,\delta_{2\Delta x}\psi\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_{2\Delta y}\left(\psi\,\delta_{2\Delta x}\zeta\right)-\delta_{2\Delta x}\left(\psi\,\delta_{2\Delta y}\zeta\right)\right]$$

$$\boxed{\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\zeta,\zeta,\zeta}=\frac{1}{3}\int\left[\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)\right]\mathrm{d}\sigma}$$

$$\mathcal{F}[\zeta]=\zeta=\int\zeta\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \qquad \delta\mathcal{F}/\delta\zeta=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

Практические применения: якобиан Аракавы (Arakawa 1966; см. также Salmon 2005, 2007)

Конечно-мерные аппроксимации:

(1) Функционалы –> функции от значений переменных в узлах сетки, от спектральных коэффициентов и т.д.;

(2) Вариационные (функциональные) производные –> частные производные по значениям переменных в узлах сетки и пр.;

Конечно-разностная аппроксимация якобиана, сохраняющая свойства его антисимметрии!

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}=\frac{1}{3}\sum\left[\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)\right]$$

«Теорема Аракавы»:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=\{\mathcal{H},\mathcal{H},\mathcal{G}\}=\frac{1}{3}\sum\left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)\right]=0$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}=\{\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{G}\}=\frac{1}{3}\sum\left[\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}\right)+\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)\right]=0$$

Трехмерные уравнения Эйлера (формализм Намбу; Névir & Blender 1993)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\varpi \qquad \nabla\cdot\mathbf{v}=0 \qquad \mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{A} \qquad \nabla\cdot\mathbf{A}=0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) \equiv (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} \qquad \boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{v}\equiv\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

Кинетическая энергия:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^2 d\tau \equiv \frac{1}{2}\int (\nabla\times\mathbf{A})^2 d\tau = \mathrm{inv}$$

Спиральность:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}\, d\tau \equiv \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\times\mathbf{A})\, d\tau = \mathrm{inv}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\omega}} \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times\left[\left(\nabla\times\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right)\times\left(\nabla\times\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right)\right] \qquad \mathbf{v} = \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\boldsymbol{\omega}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{b}}$$

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\omega}] = \int \Phi(\boldsymbol{\omega})\, d\tau \qquad \boxed{\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}} \equiv \int \left(\nabla\times\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right)\cdot\left(\nabla\times\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right)\times\left(\nabla\times\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right) d\tau}$$

Трехмерные уравнения Эйлера (формализм Намбу «среднего уровня сложности»)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v} = -\nabla B \qquad \boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \qquad B = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \varpi \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Кинетическая энергия:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^2 d\tau = \mathrm{inv}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} - \nabla B$$

Спиральность:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} + 4\boldsymbol{\Omega}) d\tau = \mathrm{inv}$$

$$\boldsymbol{\omega}_a = \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}}$$

$$\mathcal{F}[\mathbf{v}] = \int \Phi(\mathbf{v}) \mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} \equiv \int \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} d\tau}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}} = 0}$$

Энстрофия:

$$\mathcal{F} = \mathcal{W} = \frac{1}{2}\int (\nabla \times \mathbf{v})^2 d\tau \qquad \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \mathbf{v}} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \equiv \nabla \times \boldsymbol{\omega}_a \equiv \nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}}$$

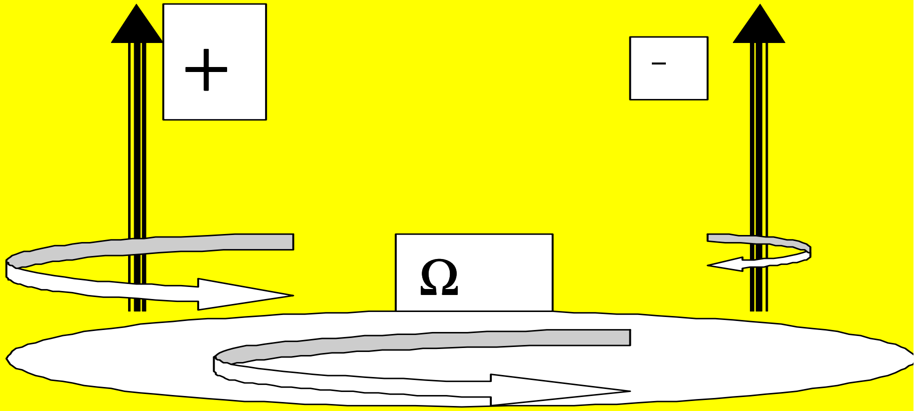
$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \{\mathcal{W}, \mathcal{H}, \mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} \equiv \int \left(\nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}}\right) \cdot \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} d\tau$$

$$\equiv \int \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \nabla \times \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}}\right) d\tau \equiv \int \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left[\left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \nabla\right)\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} - \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \nabla\right)\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{v}}\right] d\tau \neq 0$$

Спиральность (Moffatt, 1969)

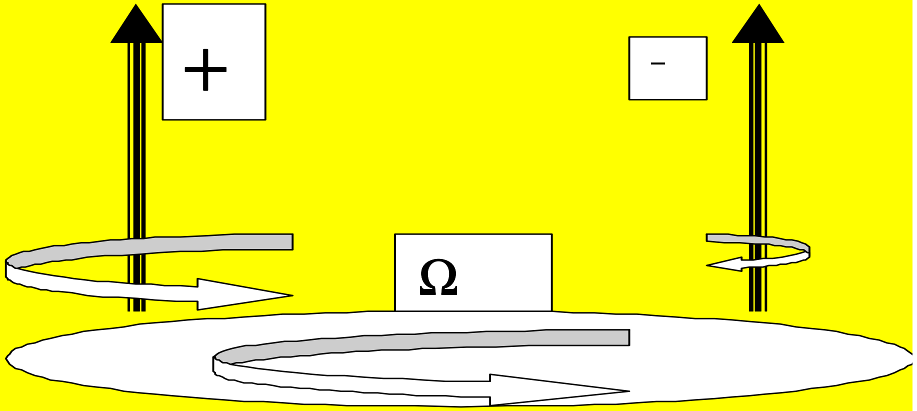
Уравнение баланса спиральности (Hide, 1989; Курганский, 1989)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(rot\,\mathbf{v}+4\boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{v}\right]+div\,\mathbf{S}=2\rho T\,\frac{\left(rot\,\mathbf{v}+2\boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\nabla s}{\rho}+2\left(rot\,\mathbf{v}+2\boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F}$$



Спиральность (Moffatt, 1969)

Ураган Katrina около пика его силы 28 августа 2005; категория 5 SSHS (Suffir-Simpson Hurricane Scale)



Тропический циклон Catarina (2004)

Торнадо около Anadarko, Oklahoma
3 мая, 1999 (VORTEX 99)

Пылевой вихрь (dust devil) в пустыне Атакама, Чили (январь 2009)

Баротропные течения жидкости (формализм Намбу «среднего уровня сложности»)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}_a\times\mathbf{v}=-\nabla B \qquad B=\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+\Pi(\rho) \qquad \Pi(\rho)=\int\frac{dp}{\rho} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0$$

Энергия: кинетическая + потенциальная:

$$\mathcal{H}=\int\left(\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2}+\Psi(\rho)\right)d\tau=\text{inv} \qquad \Psi(\rho)=\int\Pi(\rho)\,d\rho$$

Спиральность:

$$\mathcal{G}=\frac{1}{2}\int\mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}+4\boldsymbol{\Omega})\,d\tau=\text{inv}$$

$$B=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho} \qquad \rho\mathbf{v}=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}$$

$$\mathcal{M}=\int\rho\,d\tau=\text{inv} \qquad 1=\frac{\delta\mathcal{M}}{\delta\rho}$$

$$\boldsymbol{\omega}_a=\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{v}}$$

$$\mathcal{F}[\mathbf{v},\rho]=\int\Phi(\mathbf{v},\rho)\,d\tau$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}=\underbrace{\int\frac{1}{\rho}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{v}}\right)d\tau}_{\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}}}+\underbrace{\int\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho}\nabla\cdot\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}\nabla\cdot\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\right)d\tau}_{\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_{\mathbf{v},\rho}}$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}=\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}}+\underbrace{\int\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{M}}{\delta\rho}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\right)-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{M}}{\delta\rho}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\right)\right)d\tau+\text{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{M})}_{\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{M}\}_{\rho,\mathbf{v},\rho}}$$

Трехмерные уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla B + \mathbf{b} - (\nabla\times\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{v} \qquad B = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \varpi \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad \frac{\partial b}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla b$$

Энергия:

$$\mathcal{H} = \int\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - bz\right)d\tau = \mathrm{inv}$$

Спиральность:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int(\nabla\times\mathbf{v} + 4\boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{v}\,d\tau \neq \mathrm{inv}$$

Полная плавучесть:

$$\mathcal{L} = \int b\,d\tau = \mathrm{inv}$$

Скобки Намбу «второго рода»:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\mathbf{v},b] = \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} + \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L}\}_{b,\mathbf{v},b}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} = \int\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{v}}\right)d\tau \qquad \nabla\cdot\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}} = 0$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L}\}_{b,\mathbf{v},b} = \int\left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b}\nabla\left(b\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b}\right) - \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b}\nabla\left(b\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b}\right)\right]d\tau + \mathrm{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L})$$

«Энерго-вихревая теория» идеальной механики жидкости (ср. Névir & Sommer 2009)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla B + T\nabla s - (\nabla\times\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{v} \quad B = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + h + \varphi \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla s \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$$

Энергия: $$\mathcal{H} = \int\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e + \varphi\right)\rho\, d\tau = \mathrm{inv}$$

Спиральность: $$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int(\nabla\times\mathbf{v} + 4\boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{v}\, d\tau \neq \mathrm{inv}$$

Масса: $$\mathcal{M} = \int\rho\, d\tau = \mathrm{inv}$$

Энтропия: $$\mathcal{S} = \int s\rho\, d\tau \equiv \int\sigma\, d\tau = \mathrm{inv}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\mathbf{v},\rho,\sigma] = \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} + \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{M}\}_{\rho,\mathbf{v},\rho} + \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{S}\}_{\sigma,\mathbf{v},\sigma}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} = \int\frac{1}{\rho}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{v}}\right)d\tau$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{M}\}_{\rho,\mathbf{v},\rho} = \int\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{M}}{\delta\rho}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\right) - \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{M}}{\delta\rho}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\right)\right)d\tau + \mathrm{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{M})$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{S}\}_{\sigma,\mathbf{v},\sigma} = \int\left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma}\nabla\left(\frac{\sigma}{\rho}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\sigma}\right) - \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\sigma}\nabla\left(\frac{\sigma}{\rho}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\sigma}\right)\right]d\tau + \mathrm{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{S})$$

Двумерные уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta,\psi) + J(y,b) \qquad \frac{\partial b}{\partial t} = J(b,\psi)$$

Энергия:

$$\mathcal{H} = \int\left[\frac{(\nabla\psi)^2}{2} - by\right]d\sigma = \mathrm{inv}$$

Аналог «кросс-спиральности»:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int b\zeta\, d\sigma = \mathrm{inv}$$

Скобки Намбу первого рода:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\zeta,b] = \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\zeta,\zeta,b}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\zeta,\zeta,b} = -\int\left[J\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b}\right)\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\zeta} + \mathrm{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G})\right]d\sigma$$

$$b\to 0\ (\mathcal{G}\to 0): \qquad \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\zeta,\zeta,b} \to \{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_{\zeta,\zeta} = -\int\zeta\, J\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right)d\sigma$$

Двумерные уравнения Буссинеска

Энергия:

$$\mathcal{H}=\int\left[\frac{(\nabla\psi)^2}{2}-by\right]d\sigma=\mathrm{inv}$$

Энстрофия:

$$\mathcal{K}=\frac{1}{2}\int\zeta^2\,d\sigma\neq\mathrm{inv}$$

Полная плавучесть:

$$\mathcal{L}=\int b\,d\sigma=\mathrm{inv}$$

Скобки Намбу второго рода:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\zeta,b]=\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{K}\}_{\zeta,\zeta,\zeta}+\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L}\}_{b,\zeta,b}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{K}\}_{\zeta,\zeta,\zeta}=\int\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},\frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\zeta}\right)d\sigma$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L}\}_{b,\zeta,b}=\int\left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b}J\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta},b\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b}\right)-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b}J\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta},b\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b}\right)\right]d\sigma+\mathrm{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L})$$

$$b\to 0\;(\mathcal{L}\to 0):\qquad \{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{K}\}_{\zeta,\zeta,\zeta}+\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{L}\}_{b,\zeta,b}\to\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{K}\}_{\zeta,\zeta,\zeta}$$

Скобки Намбу второго рода => Скобки Намбу первого рода для редуцированной задачи

Уравнения магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho_0}+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho_0\mu}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \qquad \nabla\cdot\mathbf{A}=0$$

Полная МГД энергия:

$$\mathcal{H}=\int\left(\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2}+\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\right)d\tau=\mathrm{inv}$$

Кроссспиральность:

$$\mathcal{G}=\int\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\,d\tau=\mathrm{inv}$$

Скобки Намбу первого рода:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\mathbf{v},\mathbf{A}]=\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{A}}$$

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{A}}=\int\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{A}}\right)d\tau+\mathrm{cyc}(\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G})$$

$\mathbf{B}\to 0\ (\mathcal{G}\to 0)$:

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H},\mathcal{G}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{A}}\to\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v}}=\int\frac{1}{\rho_0}(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{A}}\right)d\tau$$

Скобки Намбу первого рода => Скобки Пуассона для редуцированной задачи

Уравнения магнитной гидродинамики

Полная МГД энергия:

$$\mathcal{H} = \int \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right) d\tau = \mathrm{inv}$$

(Кинетическая) спиральность:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}\, d\tau \neq \mathrm{inv}$$

Спиральность магнитного поля:

$$\mathcal{L} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, d\tau = \mathrm{inv}$$

Скобки Намбу второго рода:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{L}\}_{\mathbf{v},\mathbf{A},\mathbf{A}}$$

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} = \int \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \mathbf{v}} \right) d\tau$$

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{L}\}_{\mathbf{v},\mathbf{A},\mathbf{A}} = \int \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{A}} \times \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{A}} \right) d\tau + \mathrm{cyc}(\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{L})$$

$$\mathbf{B} \to 0 \ (\mathcal{L} \to 0): \qquad \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{L}\}_{\mathbf{v},\mathbf{A},\mathbf{A}} \to \{\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}\}_{\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{v}}$$

Скобки Намбу второго рода => Скобки Намбу первого рода для редуцированной задачи

Заключительные замечания по последней части лекции

- **Формализм Намбу распространен на уравнения Буссинеска (трехмерные и двумерные) и на идеальную магнитную гидродинами. В уравнениях Буссинеска скалярная плавучесть *b* является трассером; в идеальной магнитогидродинамике магнитное поле B «вморожено» в движение жидкости.**
- **Предложены два метода построения скобок Намбу. Первый метод использует энергию и другие имеющиеся интегралы движения. Получающаяся конструкция названа скобкой Намбу первого рода. Второй метод использует наряду с интегралом энергии несохраняющиеся величины (напр. спиральность и энстрофия) как конструкционные элементы для построения скобок Намбу второго рода.**
- **Установлено иерархическое соотношение между скобками Намбу первого и второго рода и соответствующей скобкой Пуассона по отношению к пределу $b \to 0$ и B $\to 0$. Конструкционные элементы скобок Намбу второго рода становятся сохраняющимися величинами и определяют скобку Намбу первого рода. В скобках Намбу первого рода все интегралы движения кроме энергии исчезают и эти скобки сводятся к скобкам Пуассона.**

$$\mathrm{NB\,II} \Rightarrow \mathrm{NB\,I} \Rightarrow \mathrm{PB}$$

Arakawa A 1966 Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion. Two-dimensional incompressible flow. Part I J Comp Phys 1: 119-143
Nambu Y 1973 Generalized Hamiltonian dynamics Phys Rev D 7: 2405-12
Névir P, Blender R 1993 A Nambu representation of incompressible hydrodynamics using helicity and enstrophy J Phys A: Math Gen 26: L1189-93
Salmon R 2005 A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models Nonlinearity 18: R1-16
Salmon R 2007 A general method for conserving energy and potential enstrophy in shallow-water models J Atmos Sci 64: 515-30
Needler GT 1985 The absolute velocity as a function of conserved measurable quantities Prog Oceanogr 14: 421-29
Névir P, Sommer M 2009 Energy-vorticity theory of ideal fluid mechanics J Atmos Sci 66: 2073-84
Курганский МВ 1989 О связи между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкости Изв АН СССР ФАО 25: 1326-29
Курганский МВ 1993 Введение в крупномасштабную динамику атмосферы (Адиабатические инварианты и их применение) СПб: Гидрометеоиздат 168 с
Kurgansky M 2002 Adiabatic Invariants in Large-scale Atmospheric Dynamics London: Taylor and Francis 222 pp
Kurgansky MV, Budillon G, and Salusti E 2002 Tracers and potential vorticities in ocean dynamics J Phys Oceanogr 32: 3562-77
Woltjer L 1958 On hydromagnetic equilibrium Proc Nat Acad Sci USA 44: 833-41

Спасибо за внимание!