Математическое моделирование процессов в атмосфере и окружающей среде регионального уровня в контексте глобальных изменений

Пененко В.В
ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск

Содержание

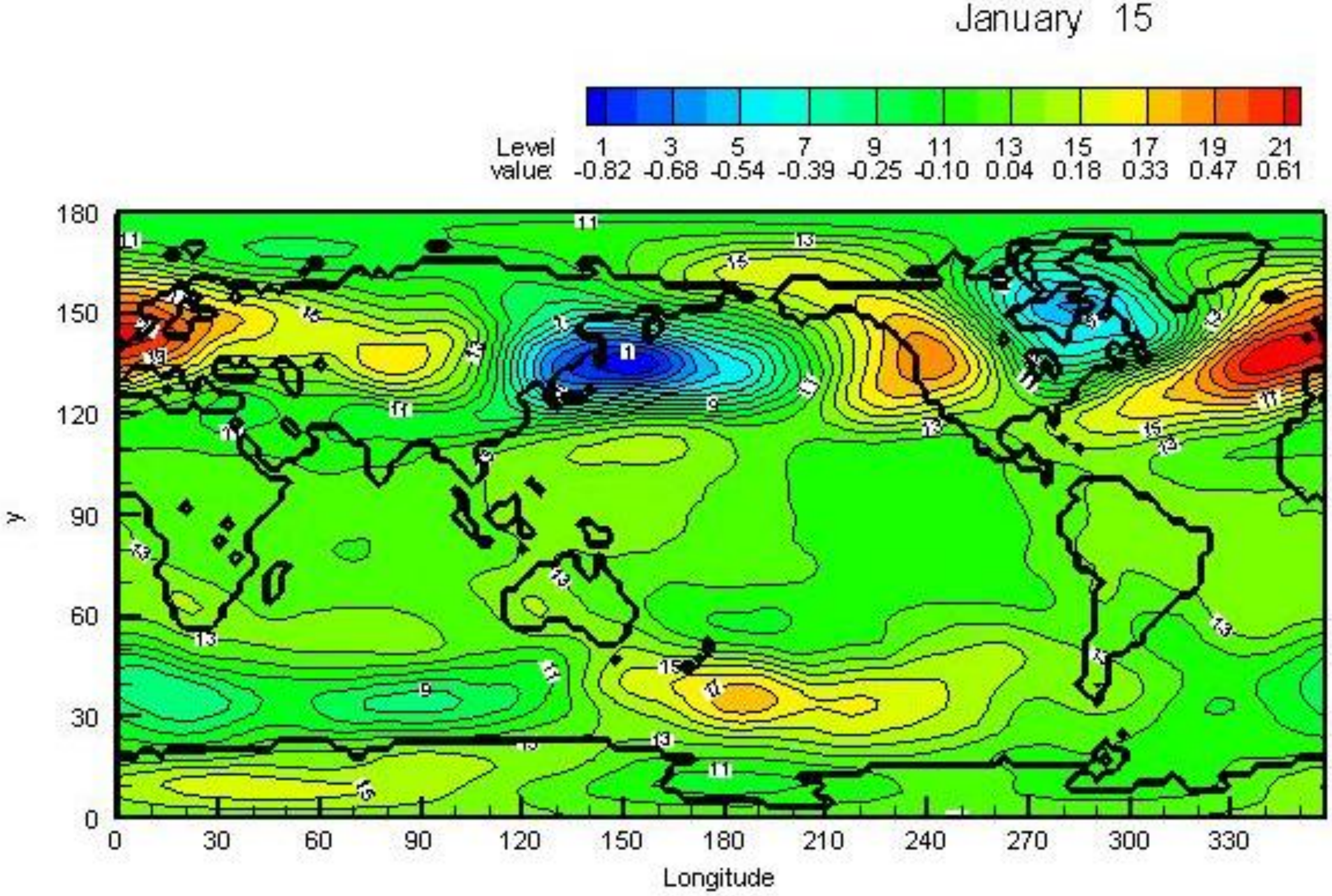
Введение

Основные проблемы

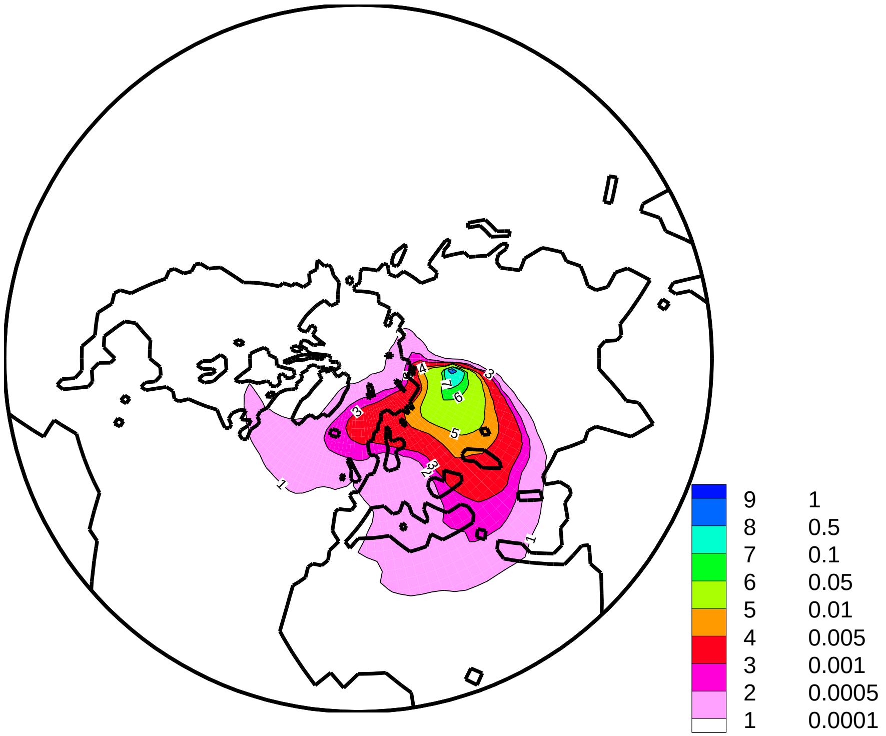
- **Наличие неопределенностей в описании процессов, входных данных и в даных наблюдений**
- **Большое число степеней свободы**
- **Разномасштабность процессов динамики атмосферы и окружающей среды**
- **Необходимость согласования на дифференциальном уровне по масштабам и процессам**
- **Адекватный перенос на дискретный уровень**

(устойчивость, чувствительность, предсказуемость)

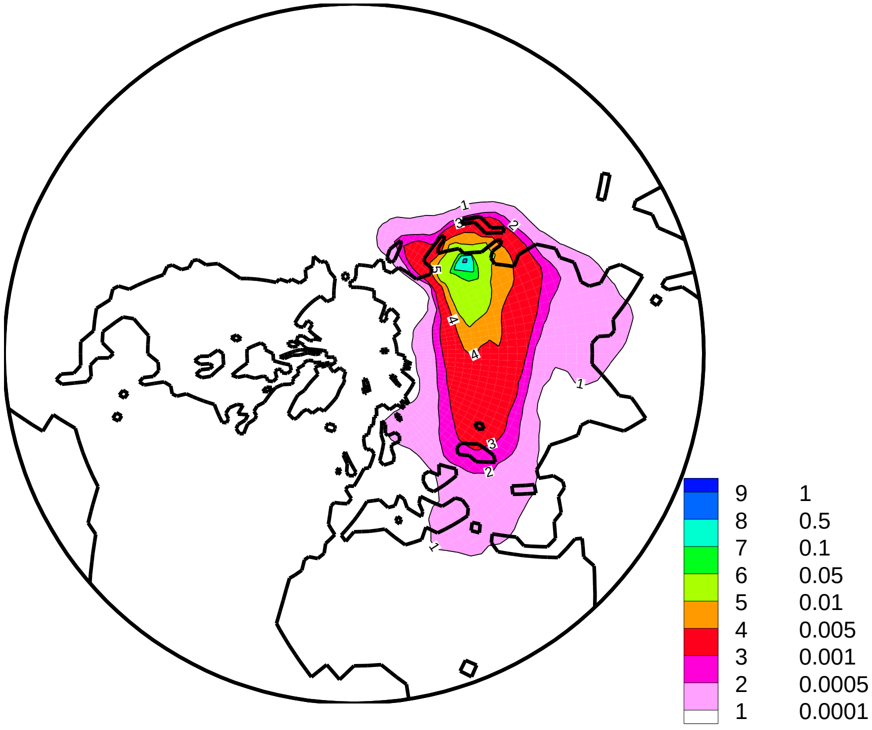
Leading basis subspace for geopotential for 56 years



Область риска/уязвимости Западно-Сибирского региона по отношению к антропогенным воздействиям



Область риска/уязвимости Дальневосточного региона по отношению к антропогенным воздействиям



Вариационные принципы

как инструмент построения дискретных моделей и организации алгоритмов прямого и обратного моделирования для организации взаимодействия разномасштабных процессов:

- **решение прямых задач**
- **решение сопряженных задач**
- **построение соотношений чувствительности моделей и функционалов**
- **организация обратных связей для решения обратных задач**
- **оценка неопределенностей**

Вариационные принципы

- **выражают в простой инвариантной форме уравнения и соотношения, описывающие эволюцию многокомпонентных разномасштабных процессов;**
- **заключают в себе синтез континуального и дискретного представления математических моделей и полей функций состояния**

Вариационные принципы

- **обеспечивают согласованность всех этапов технологии математического моделирования;**

- **вариационные принципы, связанные с именами Эйлера, Лагранжа, Якоби, Гамильтона, взаимосвязаны между собой: в них рассматривается стационарное значение некоторого определеного интеграла (функционала).**

Анализ устойчивости, чувствительности и предсказуемости климато-экологических систем

- Методы прямого моделирования
  - C.E.Leith 1975 Climate response and fluctuation dissipation
- Сопряженные задачи и методы возмущений
  - А.Вейнберг и Е.Вигнер 1959
  - Г.И.Марчук, 1961, 1972,…, н/в.
  - Ж.-Л.Лионс 1961,…, 1990
- Вариационные принципы, методы прямого и обратного моделирования, усвоение данных
  - В.В.Пененко 1975, 1981,…, н/в
  - O.Talagrand, LeDimet 1986, …,н/в

Общая структура системы моделирования

Структура системы моделирования

- **Математическая модель процессов**

$$L\left(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{Y},\mathbf{X}\right)\equiv\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+G\left(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{Y}\right)-\mathbf{f}-\mathbf{r}=0$$

$$\boldsymbol{\varphi}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{\varphi}_a^0+\boldsymbol{\xi},\qquad \mathbf{Y}=\mathbf{Y}_a+\boldsymbol{\varsigma},\quad \left(\mathbf{x},t\right)\in D_t\subset R^4\,;$$

- **Набор данных и моделей наблюдений** $\boldsymbol{\varphi}_m$ **,**$\boldsymbol{\Psi}_m$ **в** $D_t^m\subset D_t$ **,**

$$\boldsymbol{\Psi}_m=[\,\tilde{H}(\boldsymbol{\varphi})]_m+\boldsymbol{\eta}$$

- **Вектор неопределенностей и ошибок** $\mathbf{X}=\left(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varsigma},\boldsymbol{\eta}\right)^T$
- **Совокупность целевых и служебных функционалов**

$$\Phi_k(\boldsymbol{\varphi})=\int\limits_{D_t}F_k(\boldsymbol{\varphi})\chi_k(\mathbf{x},t)\,dD\,dt\equiv\left(F_k,\chi_k\right),\qquad k=1,\ldots,K$$

$$\boldsymbol{\varphi}\in Q\left(D_t\right),\ \left\{\boldsymbol{\varphi}^*,\chi\right\}\in Q^*\left(D_t\right),\ \left\{\mathbf{f},\boldsymbol{Y},\mathbf{X}\right\}\in R\left(D_t\right)$$

Вариационная формулировка модели

$$I^h\left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}^*\right) \equiv \left(L\left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}\right), \boldsymbol{\varphi}^*\right)^h = 0$$

$$\boldsymbol{\varphi} \in Q\left(D_t\right),\ \left\{\boldsymbol{\varphi}^*, \chi\right\} \in Q^*\left(D_t\right),\ \left\{\mathbf{f}, \boldsymbol{Y}, \mathbf{X}\right\} \in R\left(D_t\right)$$

Уравнение баланса полной энергии системы

$$I^h\left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}\right) \equiv \left(L\left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}\right), \boldsymbol{\varphi}\right)^h = 0$$

- Контроль устойчивости системы моделирования
- Декомпозиция по масштабам процессов и независимым переменным
- Количественная оценка степени согласованности элементов системы на дискретном уровне

Базовые модели динамики атмосферы, переноса и трансформации примесей и влаги

Model of atmospheric dynamics

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - fv + kw = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w - ku = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_w$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + (\frac{c_p}{c_v}\nabla \cdot \mathbf{v})p = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\rho c_p F_p + f_p$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + (\frac{R_d}{c_v}(1+\alpha)\nabla \cdot \mathbf{v})T = \frac{c_p}{c_v}F_T + f_T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho_a = p\left[R_d\left(1+\alpha\left(q_v, q_l, q_c, q_f\right)\right)T\right]^{-1}$$

Transport and transformation of humidity

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q_v = -\left(S_l + S_f\right) + F_{q_v}$$ water vapor

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q_c = S_c + F_{q_c}$$ cloud water

$$\frac{\partial q_l}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q_l + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\rho q_l \left|v_{lT}\right| = S_l + F_{q_l}$$ rain

$$\frac{\partial q_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q_f + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\rho q_f \left|v_{fT}\right| = S_f + F_{q_f}$$ snow/ice

Transport and transformation model
of gas pollutants and aerosols

$$\left(\mathrm{L}\boldsymbol{\varphi}\right)_{\mathrm{i}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\pi\varphi}_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{div}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{i}}\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{i}}\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{i}}) + \boldsymbol{\pi}((\mathrm{S}\boldsymbol{\varphi})_{\mathrm{i}} - \mathrm{f}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) - \mathrm{r}_{\mathrm{i}}) = 0,$$

Operators of transformation

$$\left\{\mathrm{S}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{P}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\varphi})\right\}_{\mathrm{i}} \equiv \sum_{\mathrm{q}=1}^{\mathrm{R}_{\mathrm{i}}} \left\{ \mathrm{k}(\mathrm{q})\left(\mathrm{s}_{\mathrm{i}}(\mathrm{q}^{-}) - \mathrm{s}_{\mathrm{i}}(\mathrm{q}^{+})\right) \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{U}_{\mathrm{r}}} \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{s}_{\mathrm{j}}(\mathrm{q}^{-})} \right\}$$

$$S_a\left(\varphi_i\left(\sigma\right)\right) = \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\left[\sum_{k=1}^{M}\gamma_{ik}\varphi_k\left(\sigma_1\right)\left(\sum_{m=1}^{M}\alpha_{km}K\left(\sigma-\sigma_1,\sigma_1\right)\varphi_k\left(\sigma-\sigma_1\right)\right)\right]d\sigma_1$$

$$-\varphi_i\left(\sigma\right)\int_{\sigma_0}^{\sigma_M} K\left(\sigma,\sigma_1\right)\left(\sum_{k=1}^{M}\beta_{ik}\varphi_k\left(\sigma_1\right)\right)d\sigma_1 - \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[e_i\varphi_i\left(\sigma\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left[\nu_i\varphi_i\left(\sigma\right)\right]$$

$$-R_i\varphi_i\left(\sigma\right) + \widehat{Q}_i\left(\sigma\right), \quad i = \overline{1,M}$$

Соотношения для операторов реакций. Монотонность и антитонность

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t}+\left(\Gamma(\vec{\varphi})\right)_\alpha\varphi_\alpha-\left(\Pi(\vec{\varphi})\right)_\alpha-f_\alpha\right)\varphi_\alpha{}^{*}dt=0$$

$$\vec{\varphi}=\left\{\varphi_\alpha\right\},\ \ \alpha=\overline{1,n_\alpha},\ \ \varphi_\alpha^{*}(t_j)=1,\ \ j=\overline{2,J},\ \ \vec{x}\in D_t^h$$

$$\varphi_\alpha\geq 0,\ \ \left(\Gamma(\vec{\varphi})\right)_\alpha\geq 0,\ \ \left(\Pi(\vec{\varphi})\right)_\alpha\geq 0$$

Вариационная формулировка моделей

Variational form of the model set: hydrodynamics+ chemistry+ hydrological cycle

$$\mathrm{I}\left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\varphi}^{*}\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\boldsymbol{\Lambda\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^{*} \right)_{i} + \int_{D_t} \boldsymbol{\pi}((\mathrm{S}\boldsymbol{\varphi})_{i} - \mathrm{f}_{i}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) - \mathrm{r}_{i})\boldsymbol{\varphi}^{*} \mathrm{dDdt} \right\} +$$

$$\int_{D_t} \left\{ \left(\mathrm{pp}^{*} \mathrm{div}\, \mathbf{u} - \mathrm{pdiv}\, \mathbf{u}^{*} \right) + \left(\boldsymbol{\alpha}_{p} \mathrm{pp}^{*} + \boldsymbol{\alpha}_{T} \mathrm{TT}^{*} \right) \mathrm{div}\, \mathbf{u} \right\} \mathrm{dDdt} +$$

$$\int_{D_t} \boldsymbol{\alpha}_{\rho} \left\{ \left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{a} \right)^{T} \mathrm{W}_{a} \left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{a} \right) \right\} \mathrm{dDdt} + \int_{\boldsymbol{\Omega}_t} p u_{n}^{*} d\boldsymbol{\Omega} dt = 0$$

Variational form of convection-diffusion operators

$$\left(\boldsymbol{\Lambda\varphi},\boldsymbol{\varphi}^*\right)_{\mathrm{i}} \equiv \left(\int\limits_{\mathrm{D_t}}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{\varphi}^*\frac{\partial\boldsymbol{\pi\varphi}}{\partial \mathrm{t}}-\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\boldsymbol{\pi\varphi}^*}{\partial \mathrm{t}}\right)+\left(\boldsymbol{\varphi}^*\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi\varphi}\mathbf{u}-\boldsymbol{\varphi}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi\varphi}^*\mathbf{u}\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{\pi\mu}_{\varphi}\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varphi}\;\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varphi}^*\right\}dDdt+\frac{1}{2}\int\limits_{D}\boldsymbol{\varphi\varphi}^*\boldsymbol{\pi}dD\Big|_0^{\bar{t}}+$$

$$\left.\int\limits_{\boldsymbol{\Omega}_t}\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}u_n-\boldsymbol{\mu}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial n}\right)+\boldsymbol{\alpha}_b\left(R_b\boldsymbol{\varphi}-q_b\right)\right]\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\pi}d\boldsymbol{\Omega}dt\right)_i$$

$R_b\boldsymbol{\varphi}-q_b=0$ boundary conditions on $\boldsymbol{\Omega}_t$

Аддитивная форма представлния операторов и интегрального тождества

$$I(\varphi,\varphi^*) = \int\limits_{D_t} \left(\sum_{\alpha=1}^{r} \left(\gamma_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} + L_\alpha \varphi - \tilde{f}_\alpha \right) \right) \varphi_\alpha^* dD\, dt = 0$$

Вариационный принцип для построения аддитивных схем расщепления и декомпозиции

$$I_t^h(\varphi, Y, \varphi^*) + \Phi_t^h(\varphi) =$$

$$\sum_{j=2}^{J} \int\limits_{D_{\tau^j}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{r} \left\{ \left[\Psi_\alpha^j - \varphi^{j-1} + \Delta\tau_\alpha^j \left(L_\alpha^j \Psi_\alpha^j - \tilde{f}_\alpha^j \right) \right] \Psi_\alpha^{*j} + \left[\Psi_\alpha^j - \left(\sigma_\alpha \varphi_\alpha^j - (1-\sigma_\alpha)\varphi^{j-1} \right) \right] \varphi_\alpha^{*j} \delta t_j \right\} \right.$$

$$\left. + \left(\varphi^j - \frac{1}{r} \sum_{\alpha=1}^{r} \varphi_\alpha^j \right) \varphi^{*j} \delta t_j \right\} dD + \sum_{j=2}^{J} \Phi^j(\varphi)$$

$$D_{\tau^j} = D \times \left[t_{j-1}, t_j \right], \quad \tilde{f}_\alpha = f_\alpha + r_\alpha, \; \Psi_\alpha^j = \left(\sigma_\alpha \varphi_\alpha^j - (1-\sigma_\alpha)\varphi^{j-1} \right), \; \sigma_\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

Методы исследования сложных систем: предсказуемость и чувствительность

Прямые методы анализа чувствительности

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} L^h \left(\boldsymbol{\varphi} + \alpha \delta \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y} + \alpha \delta \mathbf{Y} \right) \right\}_{\alpha = 0}$$

$$\frac{\partial \delta \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \delta \boldsymbol{\varphi} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}} \delta \mathbf{Y} - \delta \mathbf{f} = 0$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{Y}} \right] \delta \mathbf{Y} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{f}} \right] \delta \mathbf{f}$$

$$\delta \boldsymbol{\Phi}_k^h \left(\boldsymbol{\varphi} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \boldsymbol{\Phi}_k \left(\boldsymbol{\varphi} + \alpha \delta \boldsymbol{\varphi} \right) \right\}_{\alpha = 0}$$

$$\equiv \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_k}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{Y}} \right] \delta \mathbf{Y} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{f}} \right] \delta \mathbf{f} \right) \right)$$

Вариационные принципы для прямых и обратных задач

Расширенные функционалы

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h\left(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{Y},\mathbf{X},\boldsymbol{\varphi}^*\right)=\boldsymbol{\Phi}_k^h\left(\boldsymbol{\varphi}\right)+I^h\left(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{Y},\mathbf{X},\boldsymbol{\varphi}^*\right)+\left(\mathbf{X}^T M\mathbf{X}\right)^h$$

Алгоритмы расчета вариаций

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h=\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial\boldsymbol{\varphi}^*},\delta\boldsymbol{\varphi}^*\right)+\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial\boldsymbol{\varphi}},\delta\boldsymbol{\varphi}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial\mathbf{X}},\delta\mathbf{X}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial\mathbf{Y}},\delta\mathbf{Y}\right)$$

Численные схемы системы моделирования (оптимальность- условия стационарности)

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial \boldsymbol{\varphi}^*} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h}{\partial \mathbf{X}} = 0$$

Соотношения чувствительности

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h = \left(\mathrm{grad}\, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h, \delta \mathbf{Y} \right) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} I^h \left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{Y} + \alpha \delta \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}^* \right) \right\}_{\alpha = 0}$$

Уравнения обратных связей

$$\delta \mathbf{Y} = \mathrm{grad}_{\mathbf{Y}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h (\;\;), \qquad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = -\beta \; \mathrm{grad}_{\mathbf{Y}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_k^h (\;\;)$$

Fundamental role
of uncertainty functions

- integration of all technology components
- bringing control into the system
- regularization of inverse methods
- targeting of adaptive monitoring
- cost effective real-time data assimilation

ВЫВОДЫ

- **Вариационные принципы дают возможность согласовывать модели разномасштабных процессов**
- **Связь между моделями глобальных и региональных процессов обеспечивается с помощью методов прямого и обратного моделирования для реализации условий стационарности целевых функционалов**
- **На информационном уровне прямые и обратных связи устанавливаются с помощью ортогональной декомпозиции фазовых пространств функций состояния соответствующих моделей и доступной фактической информации**


Спасибо за внимание