Об одной задаче о локальных источниках и локальных наблюдениях

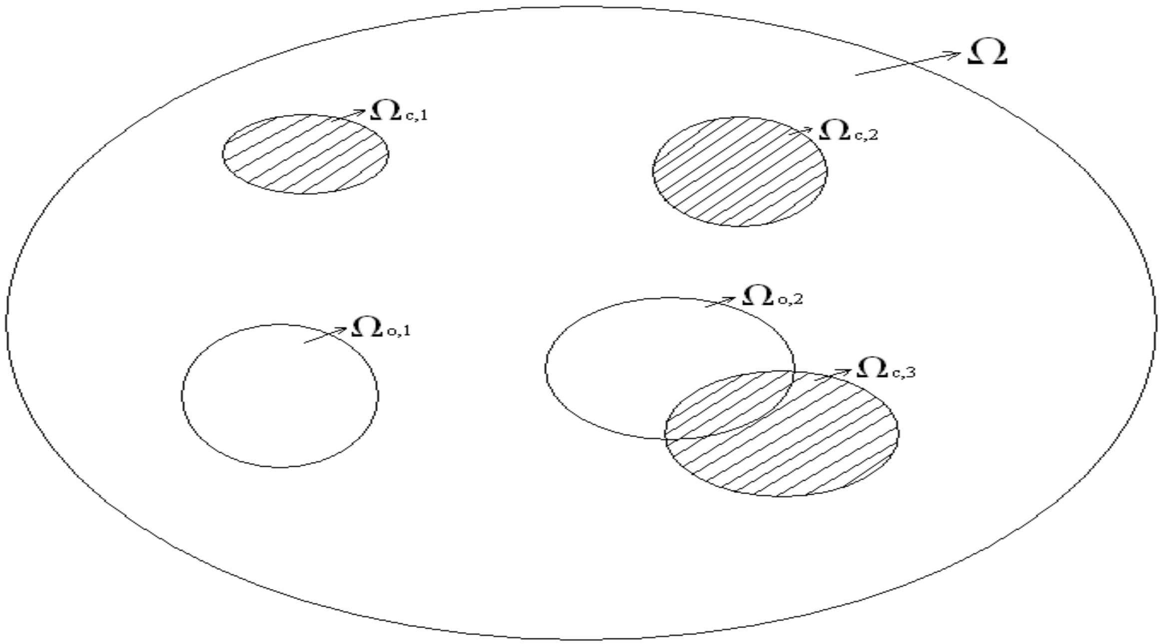
Новиков И.С.*, Агошков В.И.**

* *Московский физико-технический институт*

** *Институт вычислительной математики РАН*

e-mail: nissonsv@mail.ru

Постановка задачи



$$\Omega_c \equiv \left(\bigcup_{m=1}^{M} \Omega_{c,m}\right) \subseteq \Omega,$$

$$\Omega_o \equiv \left(\bigcup_{n=1}^{N} \Omega_{o,n}\right) \subseteq \Omega.$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + b\phi = f + m_c u \text{ в } \Omega, \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega \qquad (1)$$

$$m_o \phi = \varphi_{obs} \text{ в } \Omega \qquad (2)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ функции класса $C^{(1)}(\Omega)$, b - ограниченная неотрицательная функция, u - функция интенсивности локальных источников, $f \in L_2(\Omega)$ - заданная функция. Предполагается, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \mu = \text{const} > 0, \ \forall x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Задача: найти ϕ, u, т.ч. выполнены соотношения (1), (2).

Численный пример

Пусть $x \equiv (x_1, x_2) \equiv (x, y)$, $\Omega \subset R^2$, $\Omega = \{0 < x, y < 1\}$. В качестве Ω_c, Ω_o выбираем два квадрата из Ω, при этом $\Omega_c \subseteq \Omega_o \subseteq \Omega$, $\Omega_c = \{0.35 < x < 0.65,\ 0.35 < y < 0.65\}$, $\Omega_o = \{0.25 < x < 0.75,\ 0.25 < y < 0.75\}$, $\Omega = \{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$. Рассмотрим следующую задачу типа (1), (2):

$$-\Delta\phi + b\phi = f + m_c u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \phi|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$m_o\phi = \varphi_{obs} \quad \text{в} \quad \Omega\,, \qquad (3)$$

где Δ - оператор Лапласа, $b = const \geq 0$, f - заданная функция.

Итерационный процесс имеет вид:

$$-\Delta\phi^k + b\phi^k = f + m_c u^k \text{ в области } \Omega,\ \phi^k|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$-\Delta q^k + bq^k = (m_o\phi^k - \varphi_{obs}) \text{ в области } \Omega,\ q^k|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (4)$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k(\alpha u^k + q^k) \text{ в области } \Omega_c,\ k = 0, 1, \ldots,$$

где $\phi^k \equiv \phi^k(\alpha)$, $q^k \equiv q^k(\alpha)$, $u^k \equiv u^k(\alpha)$

Численный эксперимент

Проверка сходимости решений ϕ^k и u^k задачи (4) к решению ϕ и u задачи (3) при $\alpha \to +0$.

Тестовое решение (4): $\phi(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в области Ω;

$u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в области Ω_c;

$f(x, y) = (2\pi^2 + b)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в $\Omega \setminus \overline{\Omega_c}$;

$f(x, y) = (2\pi^2 + b - 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в области Ω_c;

$\varphi_{obs}(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ в области Ω_o.

α	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$C\_norm\_error\_\phi$	0.02140	0.02030	0.01300	0.00306	0.00030	0.00008
$C\_norm\_error\_u$	0.99	0.93	0.57	0.17	0.08	0.07

Таблица. Зависимость «С-нормы» ошибки ϕ и «С-нормы» ошибки u от α.

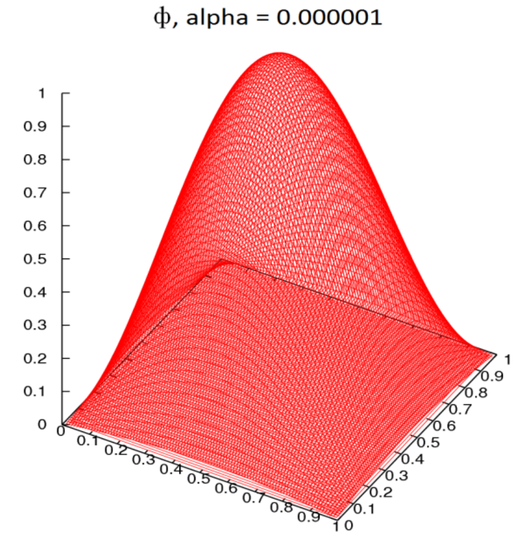


Рис. 3

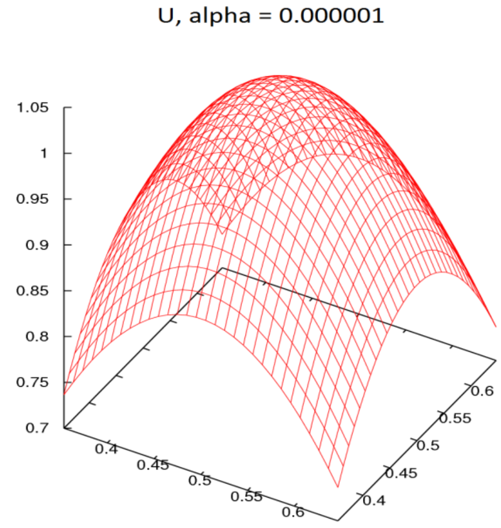


Рис. 4

Рис. 1-2. Решения задачи (4) при $\alpha = 0.000001$

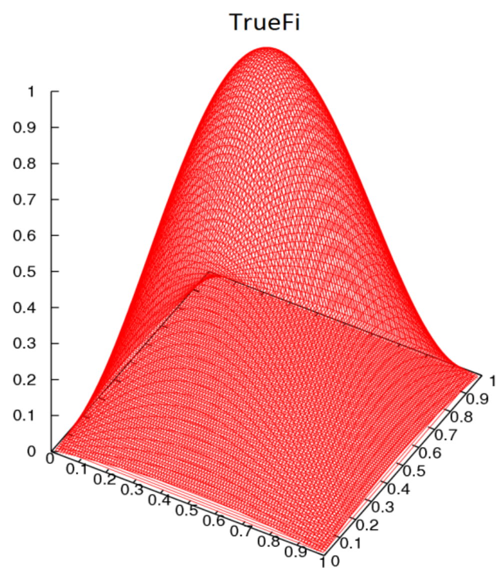


Рис. 5

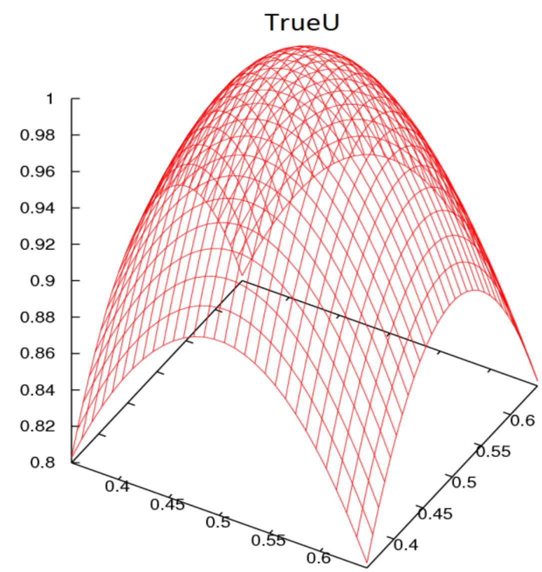


Рис. 6

Рис. 3-4. Точные решения задачи (3)

Заключение

Изложенные методы исследований и алгоритмы решения могут быть распространены на некоторые другие классы задач, имеющие прикладное значение (например, на задачи для нестационарных уравнений конвекции-диффузии, применяемые для математического моделирования распространения загрязнений от локальных источников и др.).

Спасибо за внимание!