Моделирование динамики океана, морей и внутренних водоемов

В. Б. Залесный

Институт вычислительной математики РАН

Петрозаводск, 25 августа 2013 г.

Посвящается памяти
Гурия Ивановича Марчука,
последнего президента Академии Наук СССР,
основателя Института вычислительной математики

РАН

Содержание доклада

- **Теоремы: от свойств «асимптотических решений» к глобальной разрешимости задач динамики океана**
- **Численные методы: от МКР на равномерных сетках к алгоритмам на неструктурированных сетках, метод расщепления**
- **Новые задачи: от прямых к обратным (от прогноза к оптимальному управлению)**
- **Вычислительные эксперименты: от грубого к высокому разрешению, от «примитивных» к негидростатическим моделям**
- **Заключение**

Теоремы

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - lv = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} + lu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\
\dfrac{\partial p}{\partial z} = g\rho \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma(z) w = 0,
\end{cases}
$$

$$
\frac{\partial p}{\partial t} + g\rho_0 w = 0, \qquad z = 0 \qquad + b.c.
$$

- **Демидов, Марчук (1966, атм)**
- **Бубнов, Кажихов (1971), Бубнов (1978-1984), Марчук, Бубнов (1980), Bennet, Kloeden (1980, QG) и др.**

- **Сухоносов (1981), Lions et al., (1992-1995), Дымников, Филатов (1997), Temam, Ziane (2004), Titi (2007), Kukavica, Ziane (2007)**

- **Кобельков (2006, 2008)**
- **Агошков, Ипатова (2007, + ассим., 2010)**

Разрешимость уравнений общей циркуляции океана (Кобельков, 2006; *Агошков, Ипатова, 2007*)

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g\,\mathbf{grad}\,\xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f} - \dfrac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}\,P_a - \\
\qquad - \dfrac{g}{\rho_0}\mathbf{grad}\displaystyle\int_0^z \rho_1(T,S)\,dz', \\
\dfrac{\partial \xi}{\partial t} - m\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\displaystyle\int_0^H \Theta(z)\,u\,dz\Big) - m\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\displaystyle\int_0^H \Theta(z)\dfrac{n}{m}\,v\,dz\Big) = f_3, \\
\dfrac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \dfrac{dS}{dt} + A_S S = f_S,
\end{cases}
$$

$$
\rho_1(T,S) = \rho_0\beta_T(T - T^{(0)}) + \rho_0\beta_S(S - S^{(0)}) + \gamma\rho_0\beta_{TS}(T,S) + f_P,
$$

Некоторые ссылки

Drutsa A.V. Existence “in the large” of a solution to primitive equations in a domain with uneven bottom. RJNAMM, v. 24, no 6, 515-542, 2009.

Agoshkov V.I., Ipatova V.M. Convergence of solutions to the problem of data assimilation for a multilayer quasigeostrophic model of ocean dynamics. RJNAMM, v. 25, no 2, 105-115, 2010.

Ipatova V.M., Agoshkov V.I., Kobelkov G.M., Zalesny V.B. Theory of solvability of boundary value problems for ocean dynamics equations. RJNAMM, v. 25, no 6, 511-534, 2010

Численные методы и модели динамики океана: от МКР к МКЭ

- **Методы:** Саркисян (1954), K. Brayn (1969) – Бокс-метод
- Марчук, Кузин и др. (1969, 1975, 1983) – МКЭ + МР
- Оганесян, Руховец, Астраханцев (1979-2006) - МКЭ, МС
-
- **Модели:** MOM (Brayn et al., 1969-2013)
- ВЦ СОАН (Марчук и др., 1975, 1984)
- OPA/NEMO (Madec et al., 1988-2013), POM (Mellor, 1991-2013)
- ГМЦ (Зеленько, Реснянский, 1992-2013)
- ИВМ (Марчук, Залесный, Алексеев, Багно, Дианский, Мошонкин, Русаков, Гусев и др., 1980 - 2013)

Метод расщепления
(Марчук , Яненко, Самарский, Белоцерковский и др.)

- **Метод расщепления, как методология построения моделей сложных систем**
- **Симметризованная форма уравнений**
- **Сохранение энергетических характеристик (аппроксимация на сетке В.И. Лебедева)**
- **Многокомпонентное расщепление на ряд подсистем с неотрицательными операторами**
- **Отдельная подсистема имеет свой сопряженный аналог. Сопряженная модель – совокупность сопряженных подсистем**
- **Неявные схемы, аналитические решения,** ***явные методы***

Метод расщепления – как методология численного решения прямых и обратных задач

- **Устойчивые неявные алгоритмы**

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \left(A_1 \boldsymbol{\varphi} + A_2 \boldsymbol{\varphi} + \ldots + A_n \boldsymbol{\varphi}\right) = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}^0, \qquad A_i \geq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{j+1/n}}{\partial t} + A_1 \boldsymbol{\varphi}^{j+1/n} = 0, \qquad \boldsymbol{\varphi}^{j+1/n} = \boldsymbol{\varphi}^0 \\ ---------------------- \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{j+1}}{\partial t} + A_n \boldsymbol{\varphi}^{j+1} = 0, \qquad \boldsymbol{\varphi}^{j+1} = \boldsymbol{\varphi}^{j+(n-1)/n} \end{cases}$$

$$A_i \geq 0 \; !$$

Обратные задачи и 4-х мерная вариационная ассимиляция данных наблюдений

- **Теория и методы: Понтрягин и др. (1961), Lions (1968), Евтушенко (1982), Васильев (1983),**

  Марчук (1974), Пененко, Агошков, Залесный, Шутяев, Пармузин, Ипатова и др. (1991-2013)

- **Le Dimet, Talagrand (1986), Семенов и др. (1986), Bennett (1992), Courtier (1997), Schroeter, Wenzel, et al.**

- **Системы 3D-4D VAR: MERCATOR (Fr), FOAM (UK), HYCOM (USA), NEMOVAR (EU)**

Метод вариационной инициализации (Марчук, Агошков, Шутяев, Пармузин, Залесный, 1995-2013)

$$\underbrace{\underbrace{J = \frac{1}{\Sigma_0}\int_{\Sigma_0} \alpha^0 \left(\varphi^0 - \varphi^0_{data}\right)^2 d\Sigma_0 + \frac{1}{\Sigma_1}\int_{\Sigma_1} \beta^0 \left(\varphi^0 - \varphi^0_{model}\right)^2 d\Sigma_1}_{3D-VAR} + \frac{1}{(\bar{t}-\tau)}\int_{\tau}^{\bar{t}} \frac{1}{\Sigma_2}\int_{\Sigma_2} \alpha \left(\varphi - \varphi_{data}\right)^2 d\Sigma_2\, dt}_{4D-VAR}$$

$$\varphi \in \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A(\varphi) = f \\ \varphi^0 \in R_N \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A'^*\left(\varphi^*\right) + \tilde{\alpha}\left(\varphi - \varphi_{data}\right) = 0 \\ \varphi^*\left(\bar{t}\right) = 0 \end{cases}$$

$$grad\, J = -\varphi^*(0) + \tilde{\beta}\left(\varphi^0 - \varphi^0_{model}\right)$$

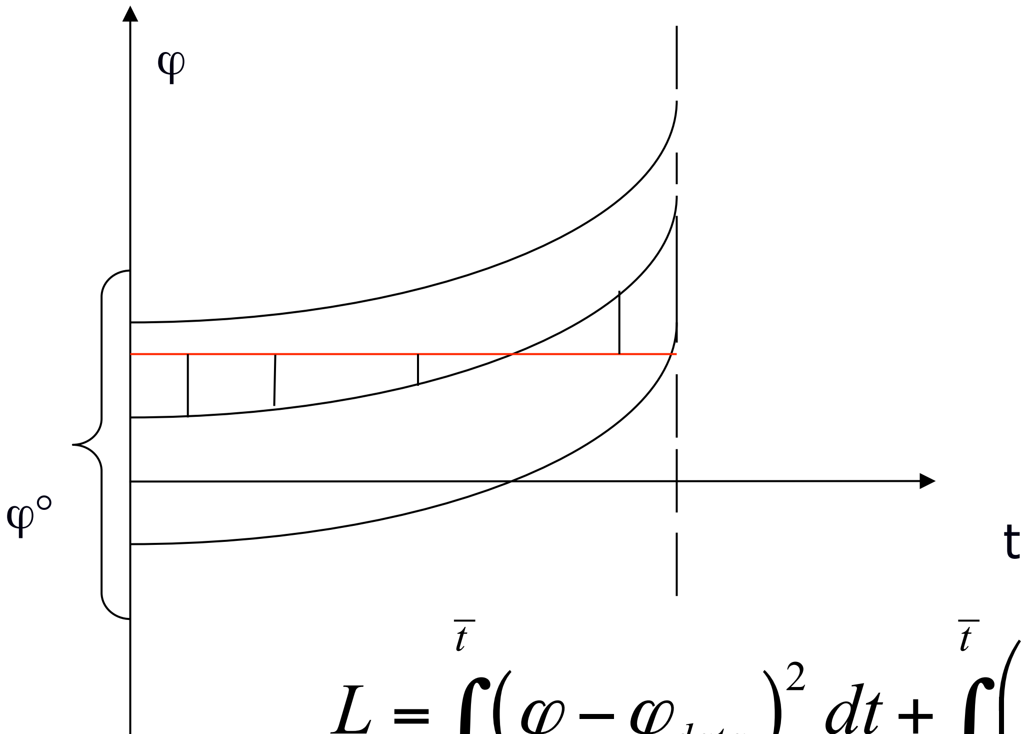
Задача инициализации

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + A\boldsymbol{\varphi} - f = 0$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = ?$$

$$J = \int_0^{\bar{t}} \left(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_{data}\right)^2 dt \to \min$$

$$\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$$



$$L = \int_0^{\bar{t}} \left(\varphi - \varphi_{data}\right)^2 dt + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi - f, \varphi^*\right) dt \to \min$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}^*} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0$$

Пример нелинейной системы оптимальности. Краевая задача в [0,t] x Ω

$$\nu - \nu\left(\frac{\partial \rho(T)}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial T^*}{\partial z} + \alpha\left(T - \hat{T}\right) = -\frac{\partial \rho(T)}{\partial T}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu'\cdot\nu^*\right),$$

$$\nu^* + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial T^*}{\partial z} = 0$$

$$T^* = 0, \quad \text{при} \quad t = t_1, \quad t = t_0.$$

Линейная 4-х мерная задача в терминах сопряженной функции

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\alpha^{-1}\left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^{*}\right)\varphi^{*} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\varphi_{data}$$

$$\varphi^{*} = 0, \quad \text{при} \quad t = t_{0}, \quad t = t_{1}$$

Линейная 4-х мерная задача в терминах сопряженной функции. Схема по времени

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j}}{\tau} + A_1 \varphi^{j+1} + A_0 \varphi^{j} = 0$$

$$(E + \tau A_1)(E - \tau A_0)\varphi^{*j-1} - \left[(E + \tau A_1)^2 + (E - \tau A_0)^2\right]\varphi^{*j} +$$

$$+ (E + \tau A_1)(E - \tau A_0)\varphi^{*j+1} = f$$

Разностные краевые задачи в терминах сопряженной функции

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} - A A^* \varphi^* + \left(A - A^*\right)\varphi^* = f$$

Неявная схема

$$\left[E + \frac{\tau}{2}\left(A + A^*\right)\right]\frac{\varphi^{*\,j+1} - 2\varphi^{*\,j} + \varphi^{*\,j-1}}{\tau^2} - A A^* \varphi^{*\,j} + \left(A - A^*\right)\frac{\varphi^{*\,j+1} - \varphi^{*\,j-1}}{2\tau} = f$$

Явная схема

$$\left[E - \frac{\tau}{2}\left(A + A^*\right)\right]\frac{\varphi^{*\,j+1} - 2\varphi^{*\,j} + \varphi^{*\,j-1}}{\tau^2} - A A^* \varphi^{*\,j} + \left(A - A^*\right)\frac{\varphi^{*\,j+1} - \varphi^{*\,j-1}}{2\tau} = f$$

Вычислительные эксперименты. Модель ИВМ РАН (Марчук и др., 2013)

- σ-система координат на сфере с произвольным расположением полюсов
- Эволюционная формулировка задачи
- Симметризованная запись уравнений
- Расщепление на энергетически сбалансированные подсистемы
- Формулировка сопряженных подсистем. Неявные схемы

Уравнения динамики океана в σ-системе: $\sigma = \dfrac{Z-\xi}{H-\xi}$

$$\frac{du}{dt} - lv = -\frac{1}{\rho_0 r_x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0 r_x}\frac{\partial Z}{\partial x}\rho + \Lambda_u u$$

$$\frac{dv}{dt} + lu = -\frac{1}{\rho_0 r_y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0 r_y}\frac{\partial Z}{\partial y}\rho + \Lambda_v v$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = gZ_\sigma \rho$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Z_\sigma r_y u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Z_\sigma r_x v\right)\right] + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(Z_\sigma T\right) = \Lambda_T T \qquad \frac{d}{dt}\left(Z_\sigma S\right) = \Lambda_S S$$

$$\rho = \rho(T, S, Z)$$

Закон сохранения полной энергии

- **Пусть отсутствуют внешние и внутренние источники и стоки. Тогда можно получить закон сохранения полной энергии, умножая скалярно уравнения модели на вектор**

$$\left(\boldsymbol{\rho}_0 u, \boldsymbol{\rho}_0 v, \boldsymbol{\omega}, p, -gZ\right)$$

- **Имеем**

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2}Z_{\sigma}\left(u^2+v^2\right)d\boldsymbol{\Sigma}-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}gZ_{\sigma}Z\boldsymbol{\rho}\,d\boldsymbol{\Sigma}=0$$

Симметризованная форма уравнений

$$\frac{du}{dt}-\tilde{l}\,v=-\frac{1}{\rho_0 r_x}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\underbrace{\frac{g}{2\rho_0 r_x}\left(\rho\frac{\partial Z}{\partial x}-Z\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)}_{1}+\Lambda_u u$$

$$\frac{dv}{dt}+\tilde{l}\,u=-\frac{1}{\rho_0 r_y}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}+\underbrace{\frac{g}{2\rho_0 r_y}\left(\rho\frac{\partial Z}{\partial y}-Z\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)}_{2}+\Lambda_v v$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\sigma}=\underbrace{\frac{g}{2}\left(\rho\frac{\partial Z}{\partial\sigma}-Z\frac{\partial\rho}{\partial\sigma}\right)}_{3}$$

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Dr_y u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Dr_x v\right)\right]+\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}=0$$

$$D\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\underbrace{\frac{1}{r_y r_x}\frac{\partial}{\partial x}\left(Dur_y\rho\right)+\frac{Du}{r_x}\frac{\partial\rho}{\partial x}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{r_x r_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(Dvr_x\rho\right)+\frac{Dv}{r_y}\frac{\partial\rho}{\partial y}}_{2}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial\sigma}(\omega\rho T)+\omega\frac{\partial\rho}{\partial\sigma}}_{3}\right\}=\Lambda\rho$$

Метод расщепления. Выделение подсистемы негидростатической динамики

$$\frac{d\,u}{d\,t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial\,x} \qquad \frac{d\,\mathrm{v}}{d\,t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial\,y}$$

$$\frac{d\,w}{d\,t} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial\,z} - g\rho\right) \qquad \frac{\partial\,u}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial\,\mathrm{y}} + \frac{\partial\,w}{\partial\,z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial\,z} - g\rho\right) = \frac{\partial}{\partial\,z}\left[\tilde{p} - \left(p_{atm} - g\rho_0\zeta + g\int_0^z \rho\,d\,z_1\right)\right]$$

$$p(t,x,y,z) = \tilde{p}(t,x,y,z) - \underbrace{\left[p_{atm} - g\rho_0\zeta(t,x,y) + g\int_0^z \rho(t,x,y,z_1)\,dz_1\right]}_{p_g}$$

Введем σ- координату и ε - регуляризацию

$$Z_\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{g Z_\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} Z_\sigma \frac{\partial p}{\partial x}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} Z_x \frac{\partial p}{\partial \sigma}}_{4} + f_1$$

$$Z_\sigma \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = \underbrace{g Z_\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} Z_\sigma \frac{\partial p}{\partial y}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} Z_y \frac{\partial p}{\partial \sigma}}_{5} + f_2 \qquad Z_\sigma \frac{\partial w}{\partial t} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \sigma}}_{3}$$

$$\varepsilon Z_\sigma \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}_{6} + \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma u)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma \mathrm{v})}_{2} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\underbrace{w}_{3} - \left(\underbrace{\frac{\partial Z}{\partial t}}_{6} + \underbrace{Z_x u}_{4} + \underbrace{Z_y \mathrm{v}}_{5} \right) \right] = 0.$$

Подсистема негидростатической динамики по вертикальной координате

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\left[\underbrace{Z_x \frac{\partial\left(p-\overline{p}\right)}{\partial\sigma}}_{1} - \int_0^1 \left(Z_x \frac{\partial\left(p-\overline{p}\right)}{\partial\sigma}\right) d\sigma\right]$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\left[\underbrace{Z_y \frac{\partial\left(p-\overline{p}\right)}{\partial\sigma}}_{2} - \int_0^1 \left(Z_y \frac{\partial\left(p-\overline{p}\right)}{\partial\sigma}\right) d\sigma\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial\left(p-\overline{p}\right)}{\partial\sigma}}_{3} = 0$$

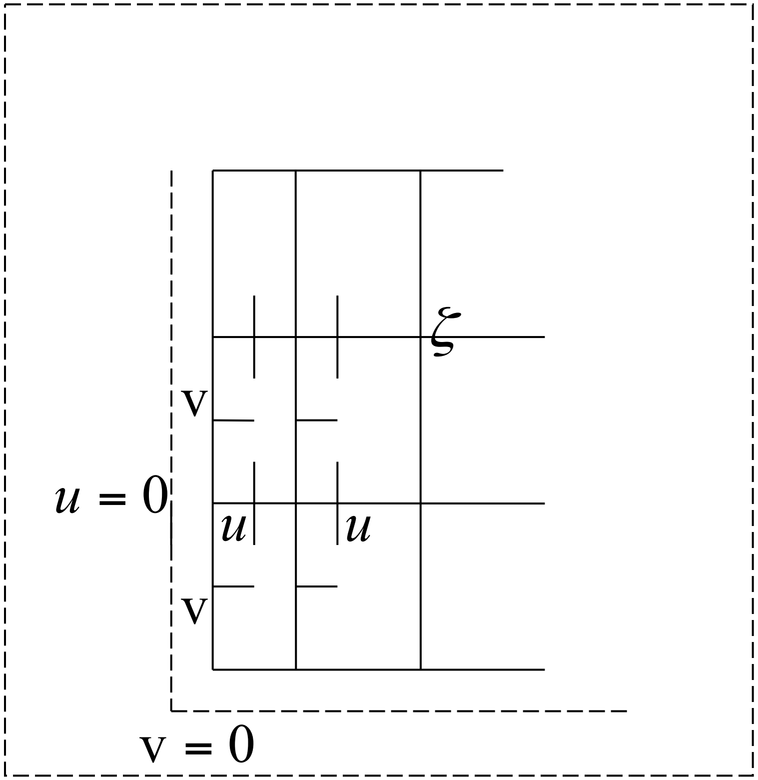
$$\varepsilon Z_\sigma \frac{\partial\left(p-\overline{p}\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\underbrace{w}_{3} - \left(Z_t + \underbrace{u Z_x}_{1} + \underbrace{\mathrm{v} Z_y}_{2}\right)\right] = 0.$$

Аппроксимация: МКР, МКЭ. Закон сохранения и потеря локальности. Диагонализация.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l\,\mathrm{v} - \mathrm{g}\frac{\partial \zeta}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

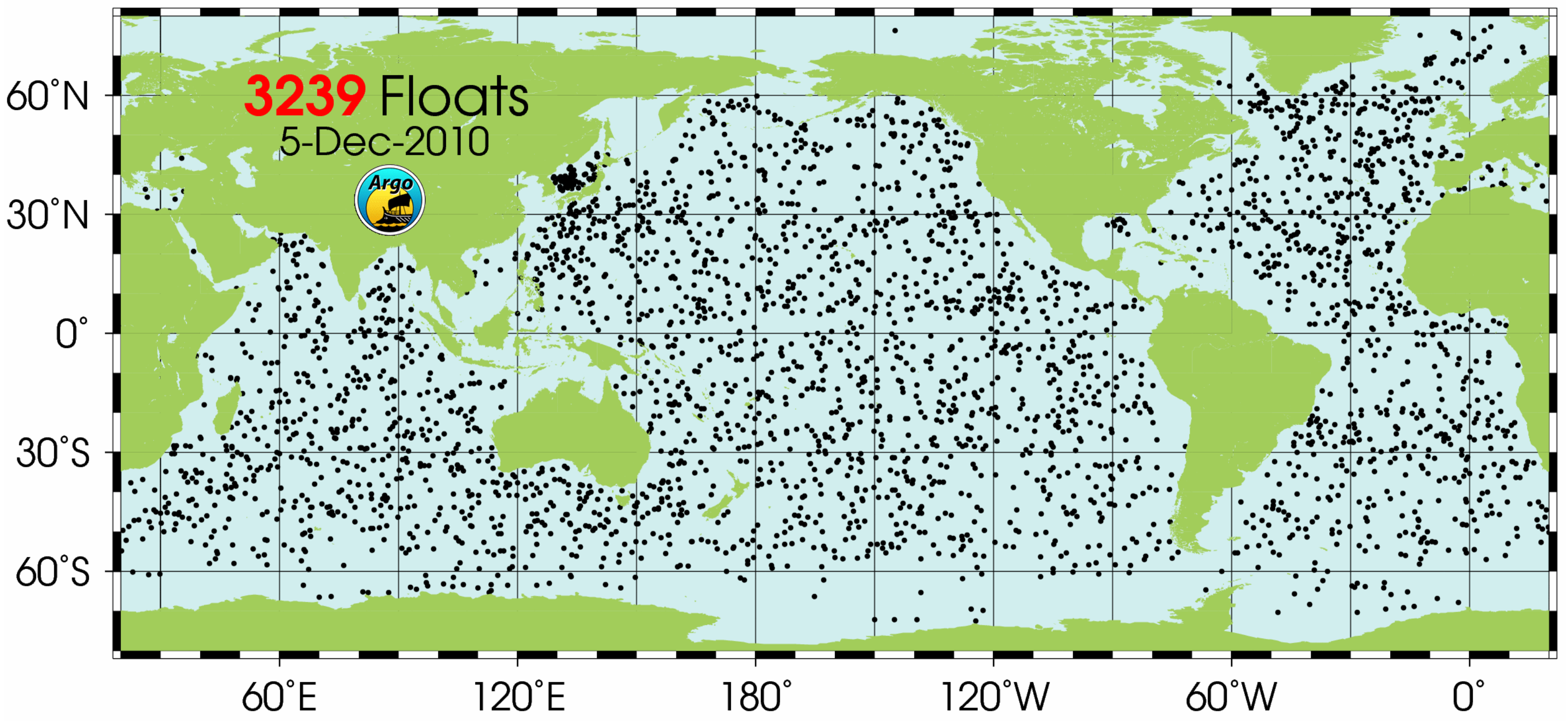
$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + l\,u - \mathrm{g}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \left(\vec{u},\bar{n}\right)\Big|_{\partial D} = 0$$

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial H \mathrm{v}}{\partial y} = 0$$

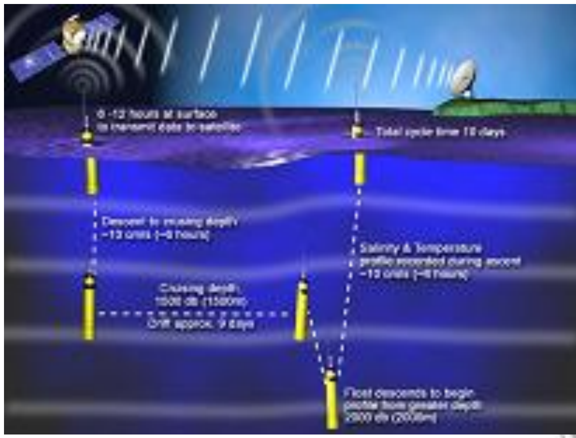


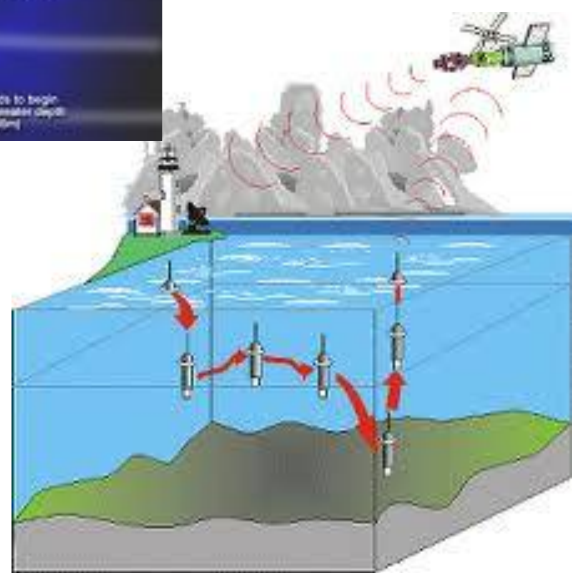
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} + l^2\,\mathrm{v} - \mathrm{g}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial y} - l\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\zeta = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x} gH\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial x} l\right) H\,\mathrm{v} = 0 \end{cases}$$

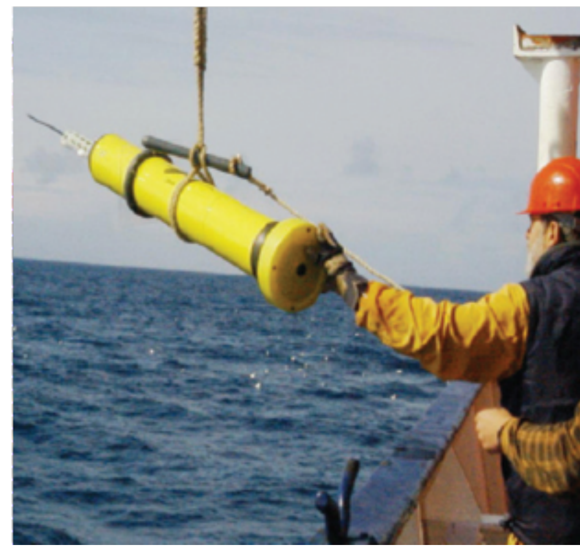
Мировой океан. 4-х мерная вариационная ассимиляция данных буев АРГО



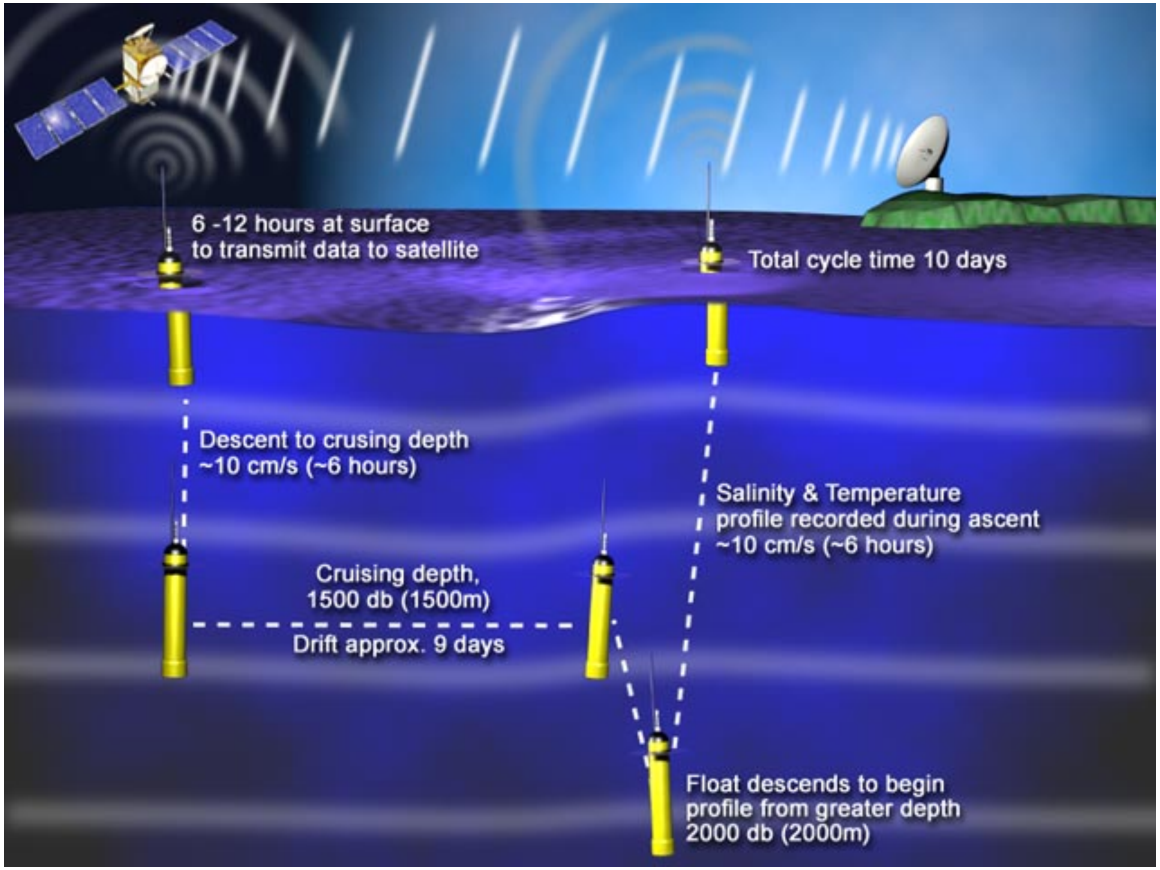
Буи АРГО


Total cycle time 10 days
Salinity & Temperature
Cruising depth
Drift approx. 9 days
Float descends to begin
profile from greater depth
2000 db (2000m)

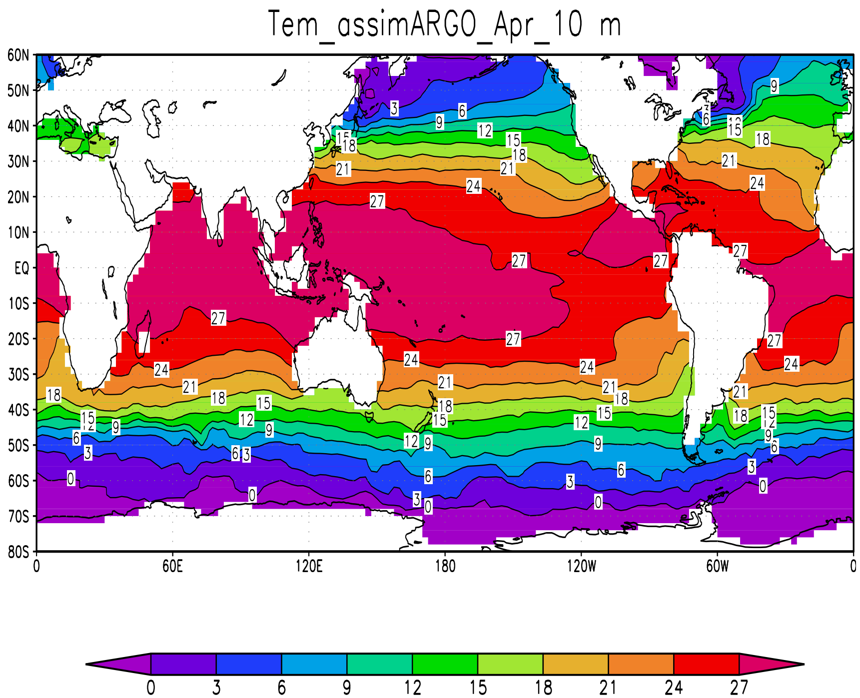


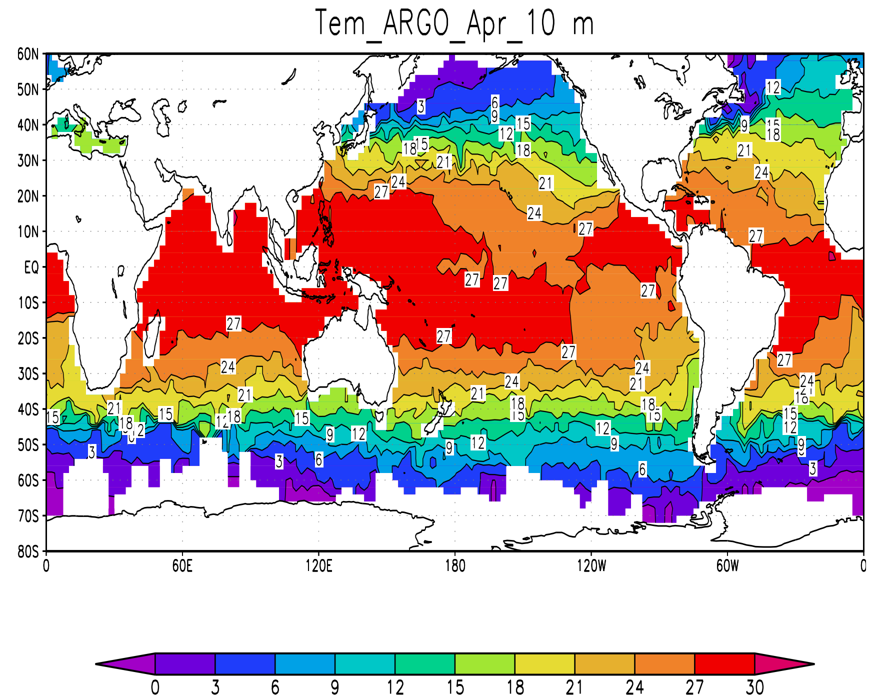


Буи АРГО

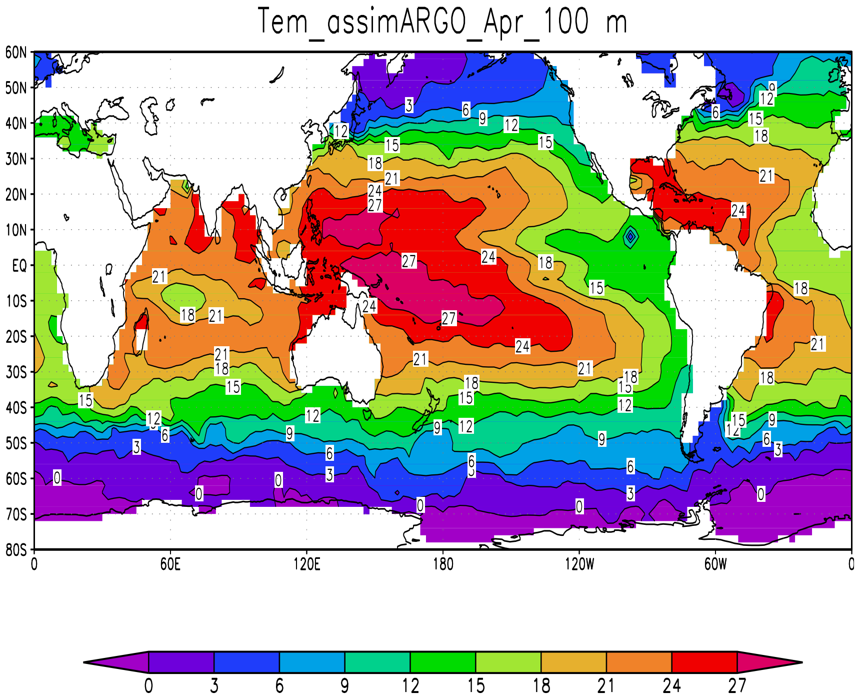

6 -12 hours at surface
to transmit data to satellite
Total cycle time 10 days
Descent to crusing depth
~10 cm/s (~6 hours)
Salinity & Temperature
profile recorded during ascent
~10 cm/s (~6 hours)
Cruising depth,
1500 db (1500m)
Drift approx. 9 days
Float descends to begin
profile from greater depth
2000 db (2000m)

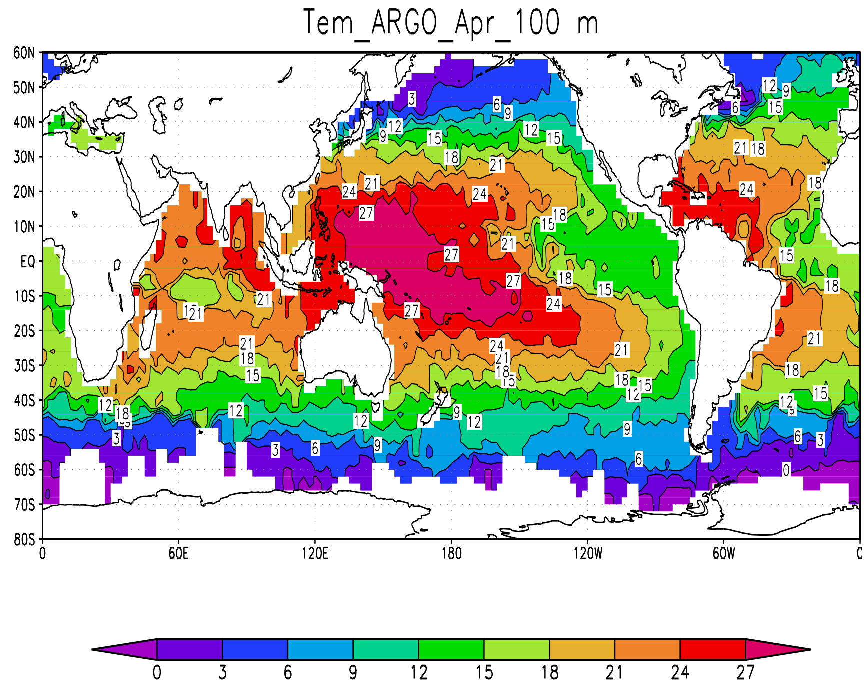
4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 10 м, апрель 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)



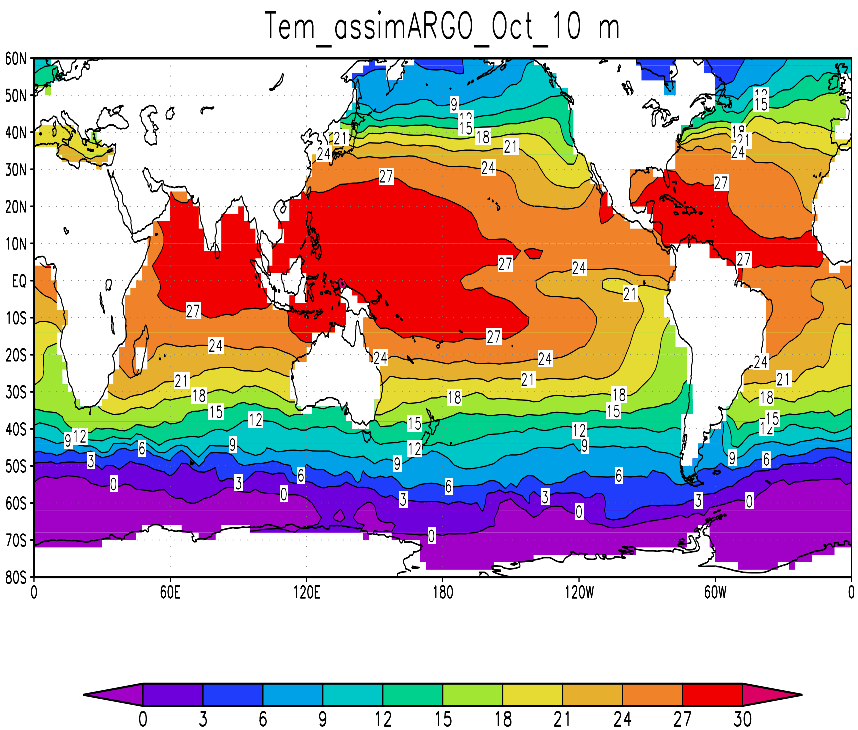


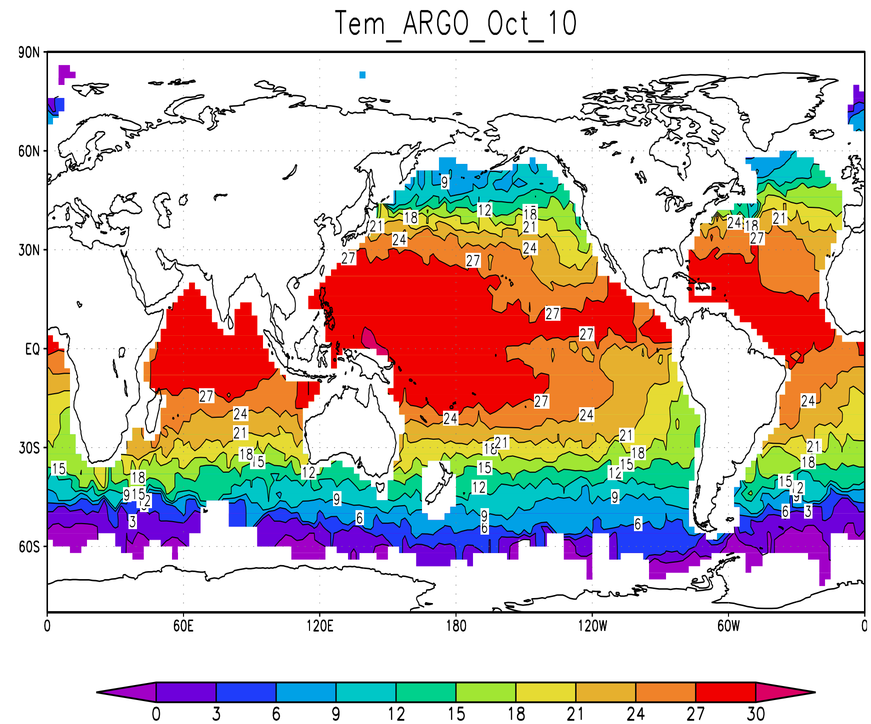
4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 100 м, апрель 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)



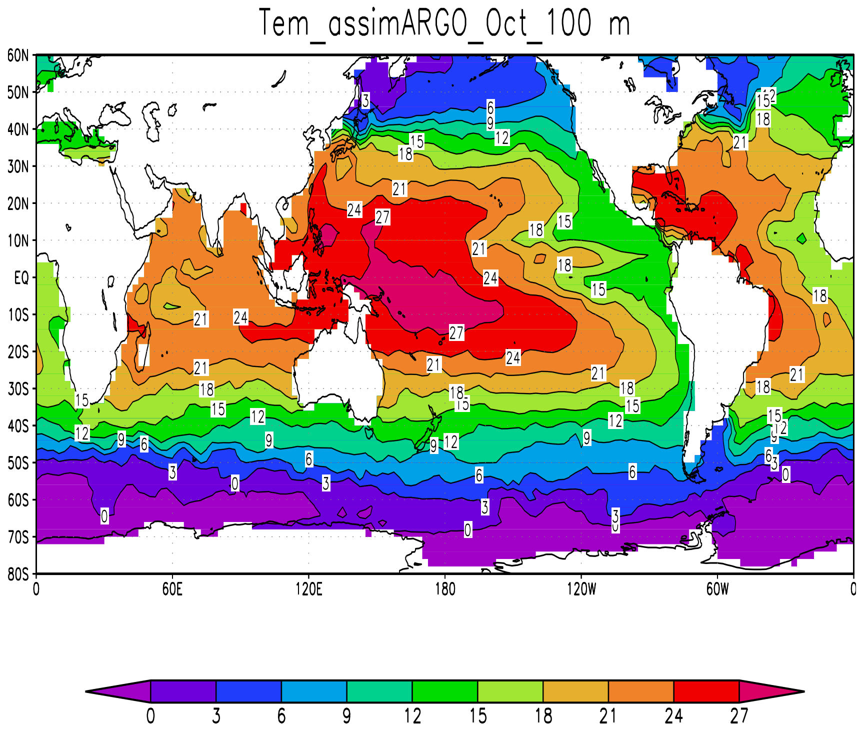


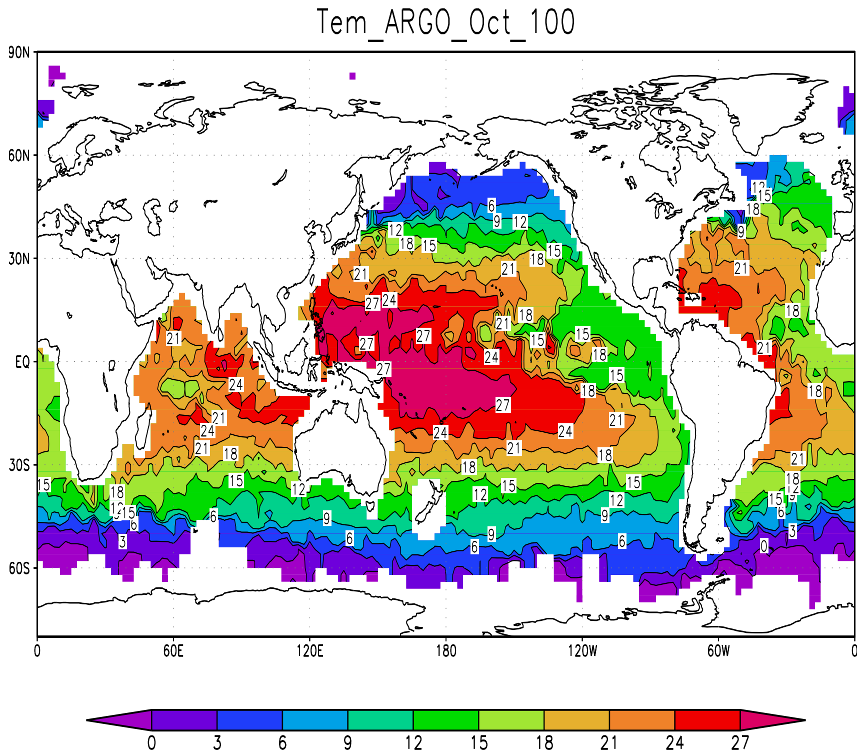
4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 10 м, октябрь 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)



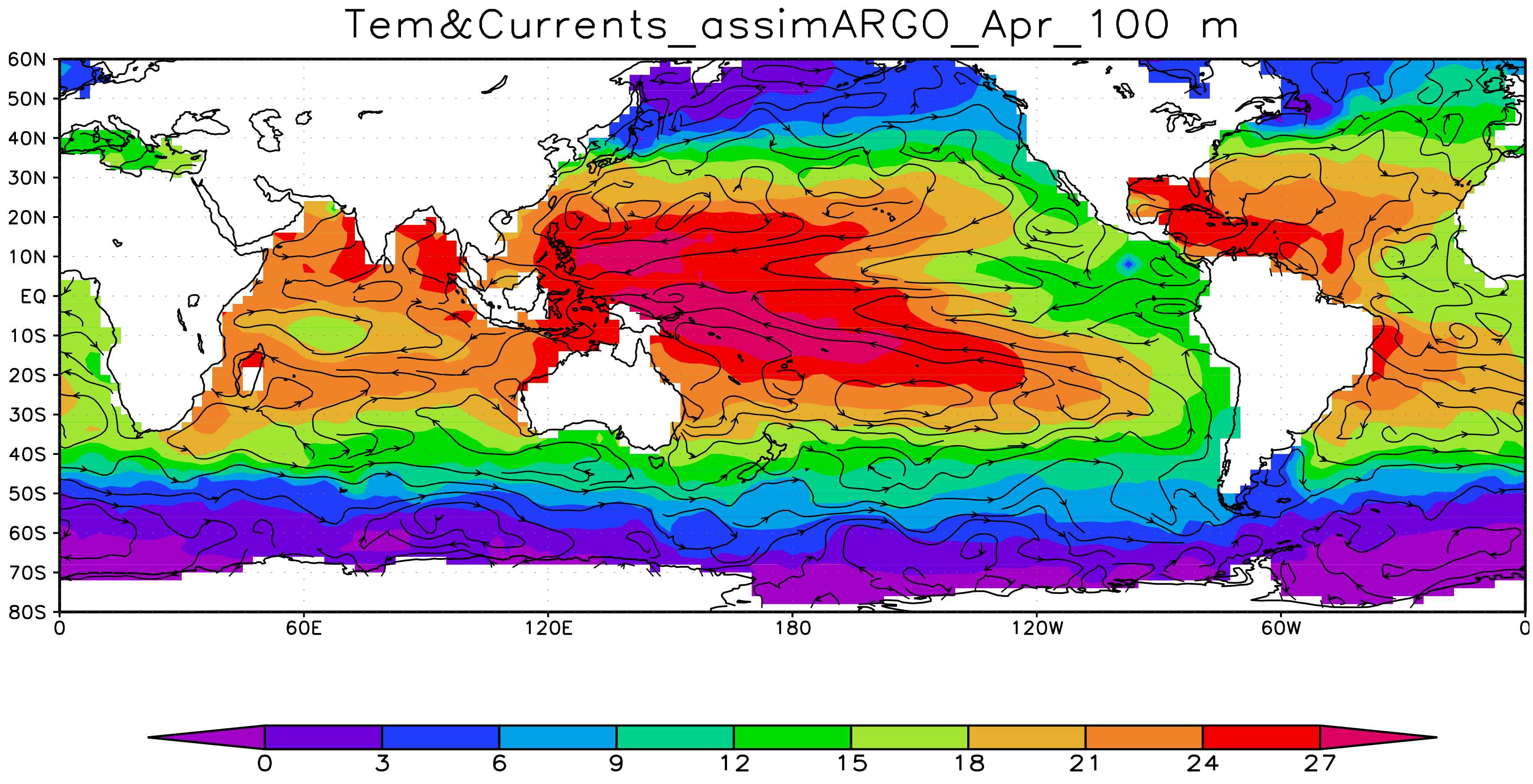


4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 100 м, октябрь 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)

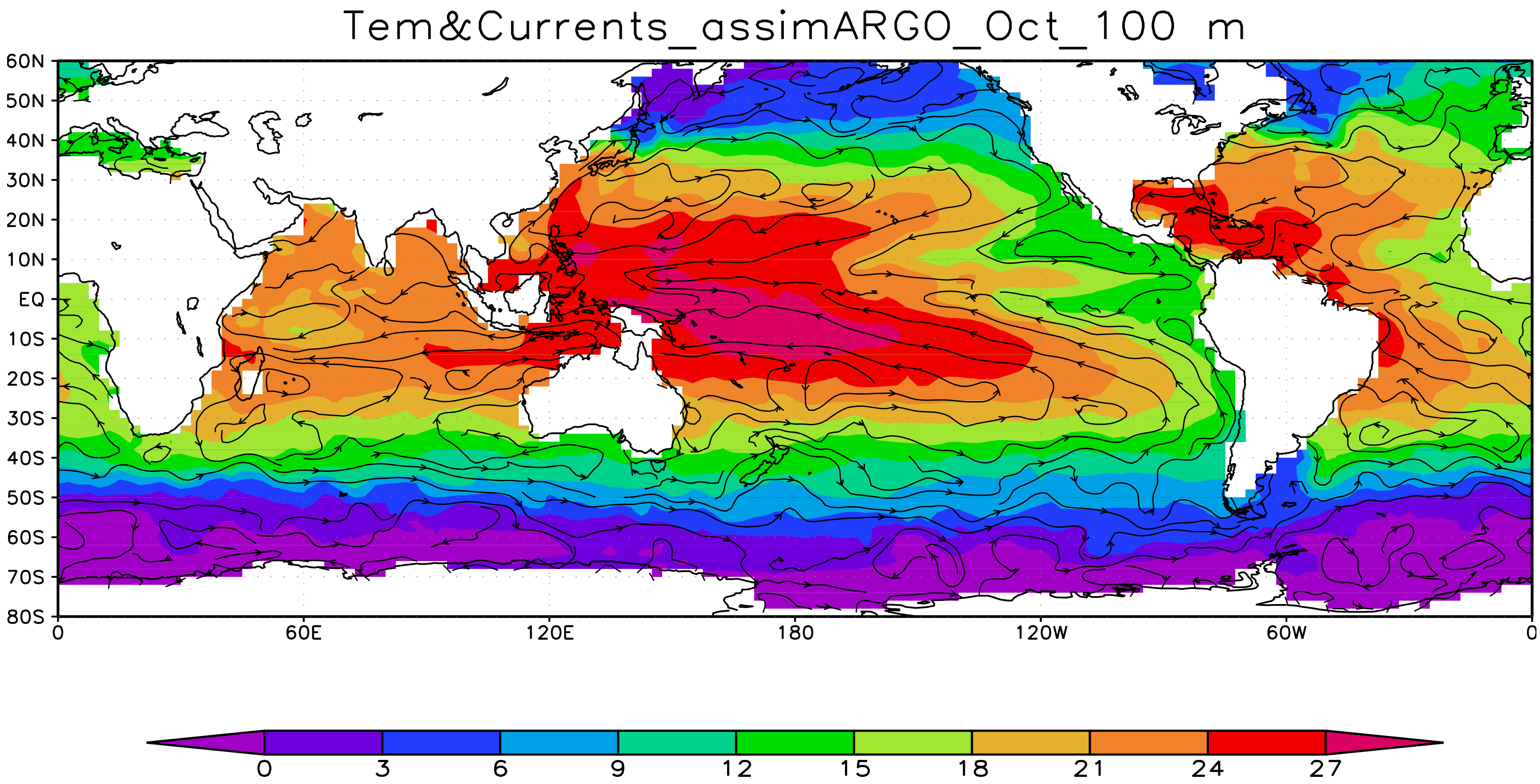




4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура и течения на уровне 100 м, апрель 2008



4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура и течения на уровне 100 м, октябрь 2008



Индийский океан

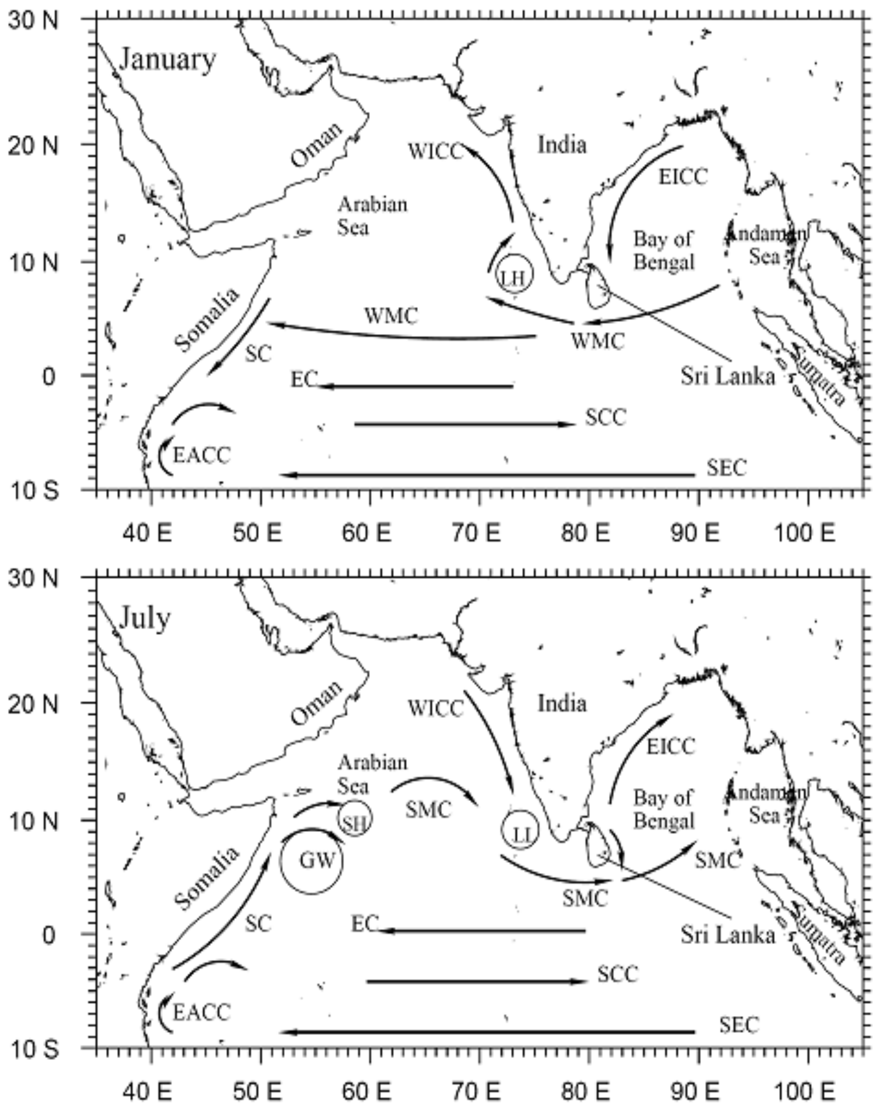
- **Индийский океан, 1/8°x1/12°x21**
- **Долгосрочная программа сотрудничества по науке и технологии между Россией и Индией (2005-2008).**
- **Проект**

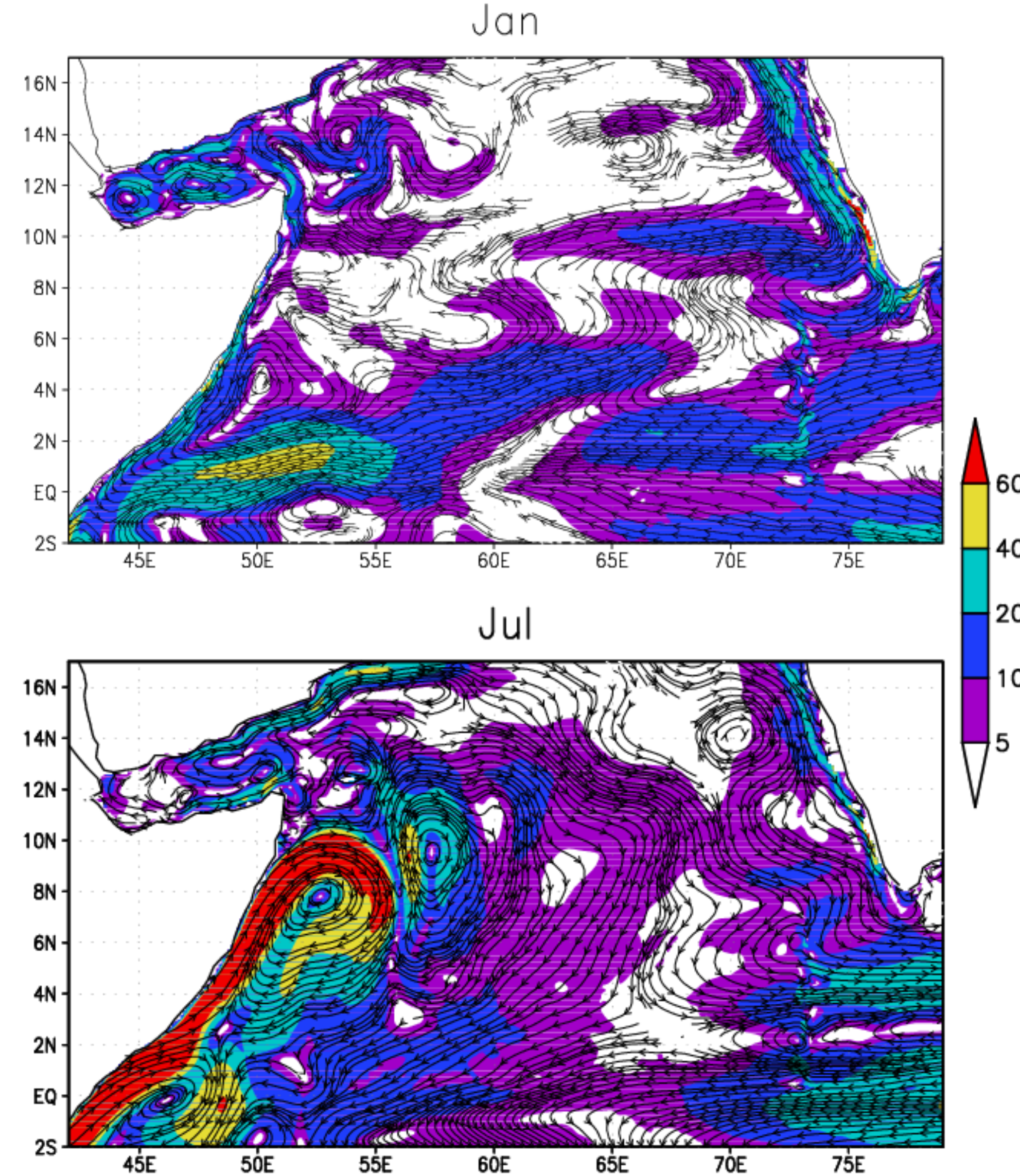
  «Разработка системы ассимиляции данных в океане для оперативного использования»

  (ИВМ РАН, National Centre for Medium Range Weather Forecasting).

Схема циркуляции (Shankar et al.2002). GW: Great Whirl; and SH:Socotra high LH:Lakshadweep high; LL:Lakshadweep low.

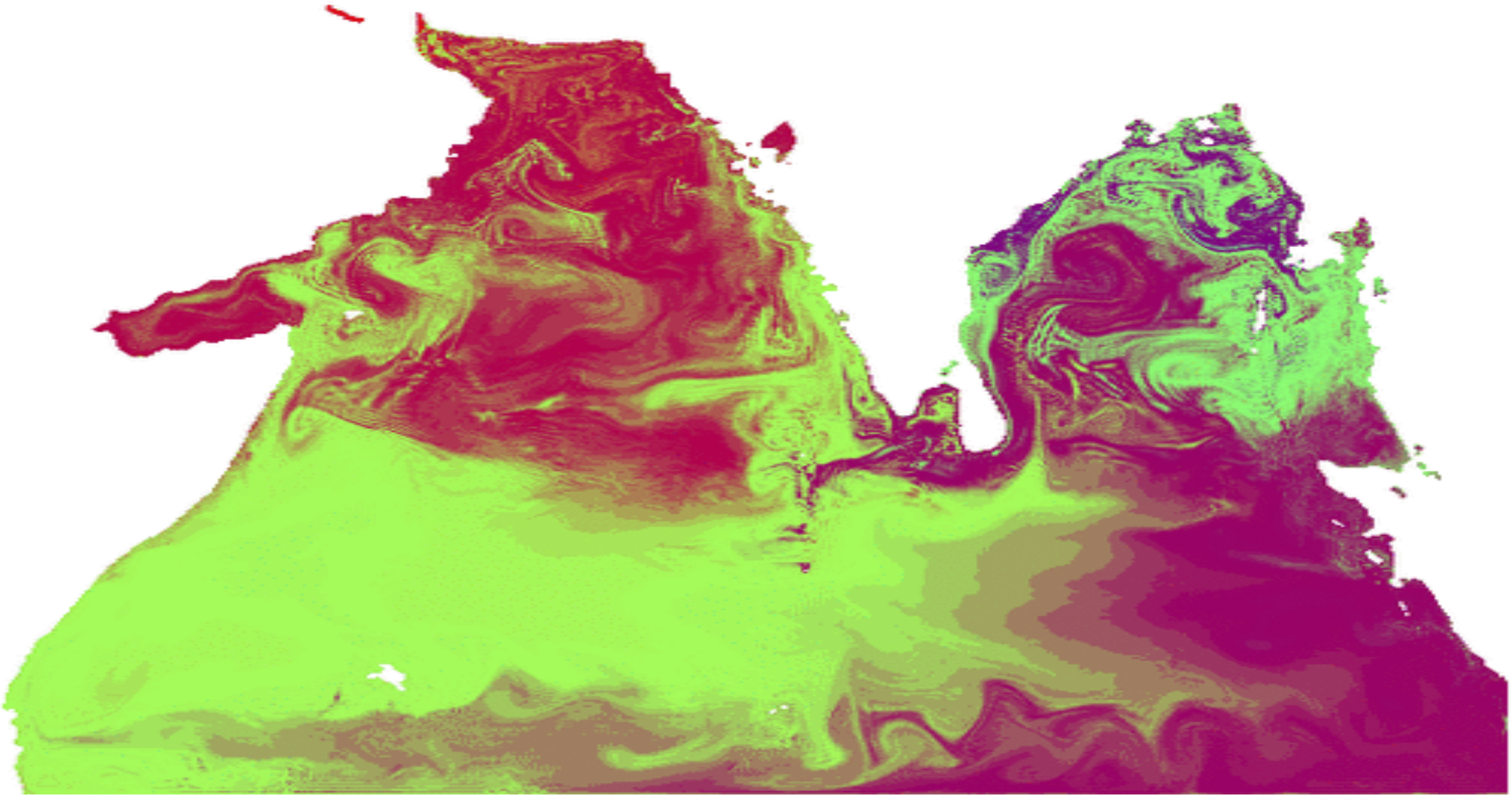
Модель ИВМ. Среднемесячные течения в Аравийском море осредненные в слое 20-120 м.



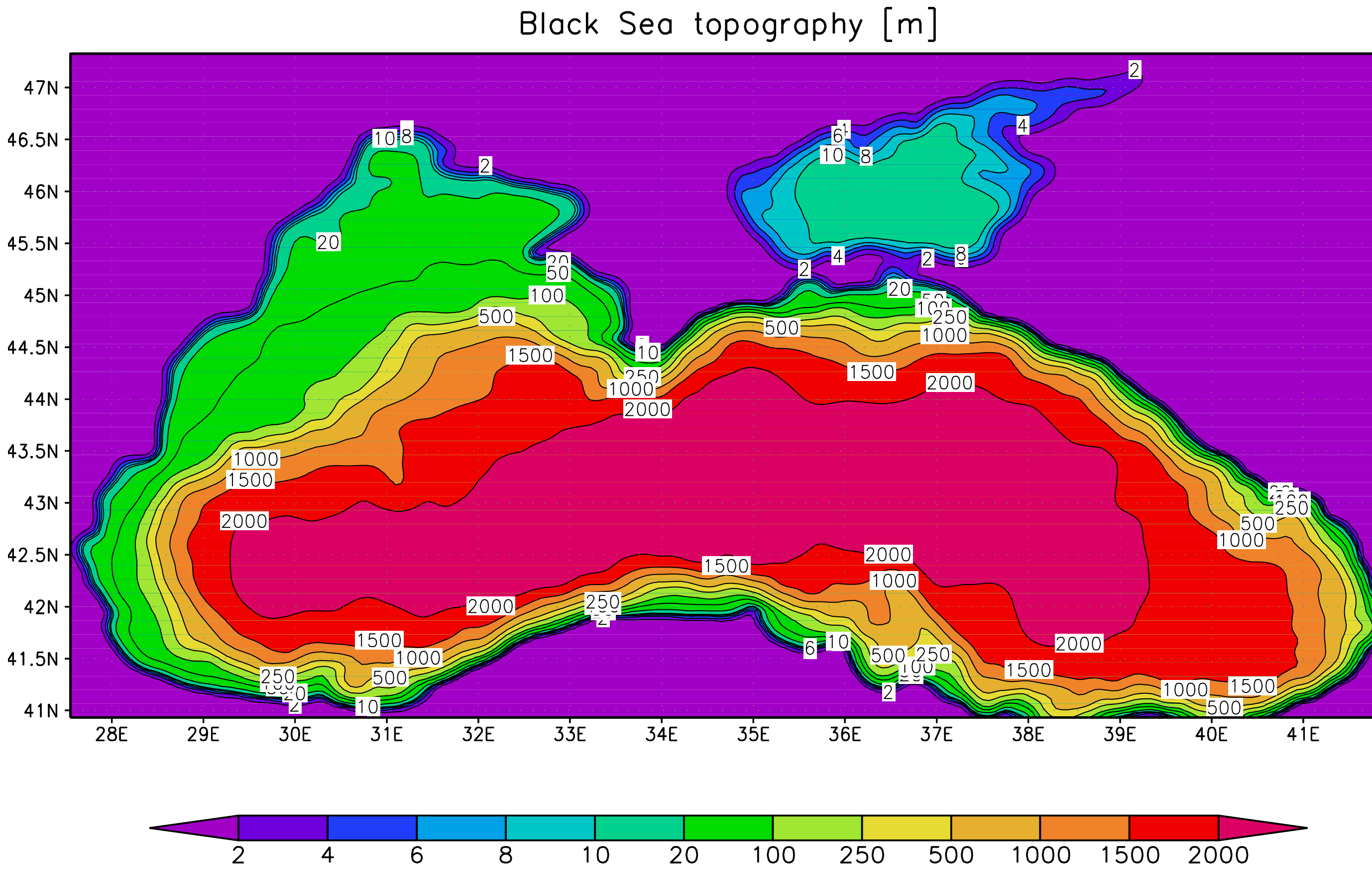


Индийский океан: 1/8ºx1/12°x21, Ro > 45 км

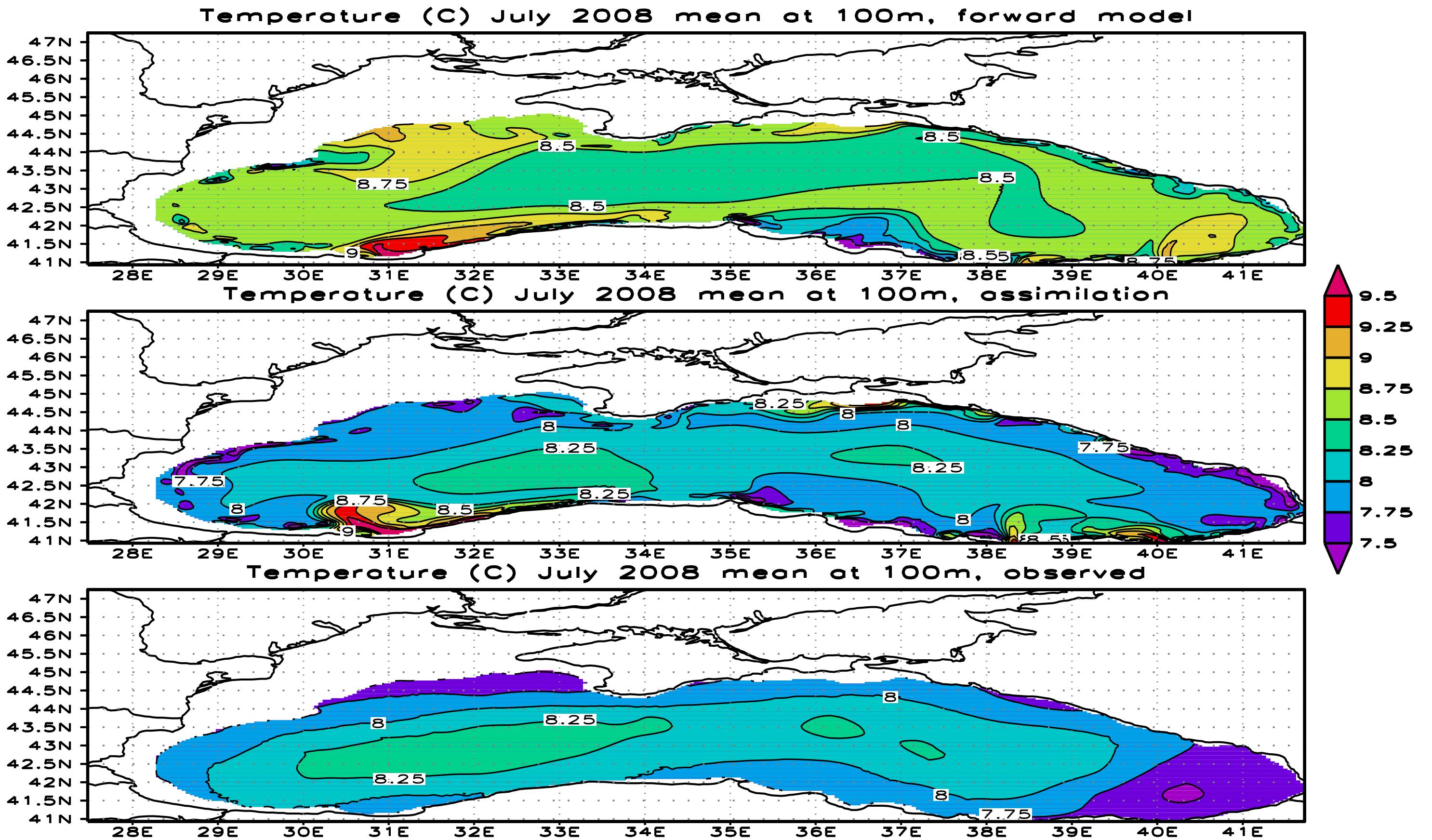
Соленость на уровне 100 м



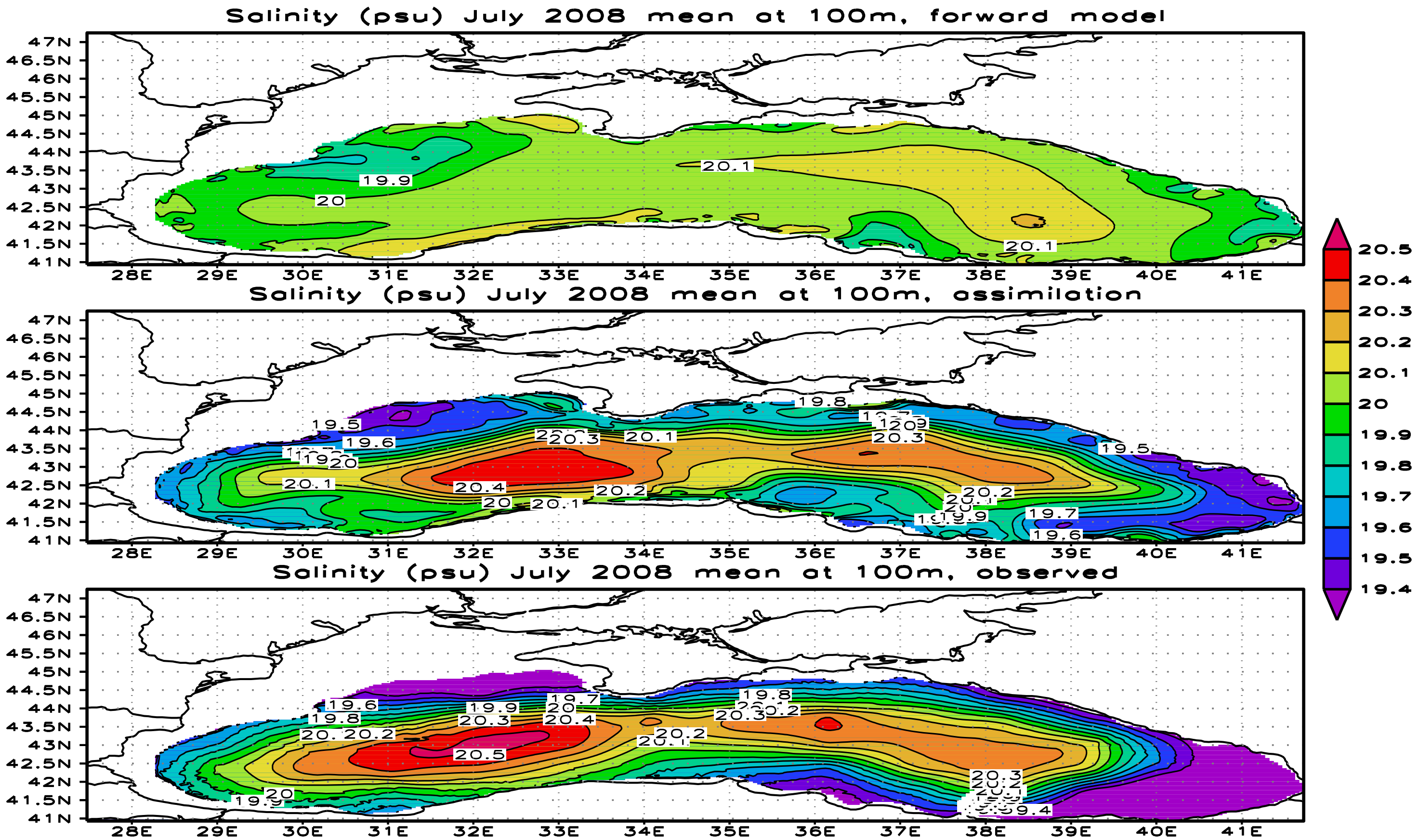
Модель Черного моря



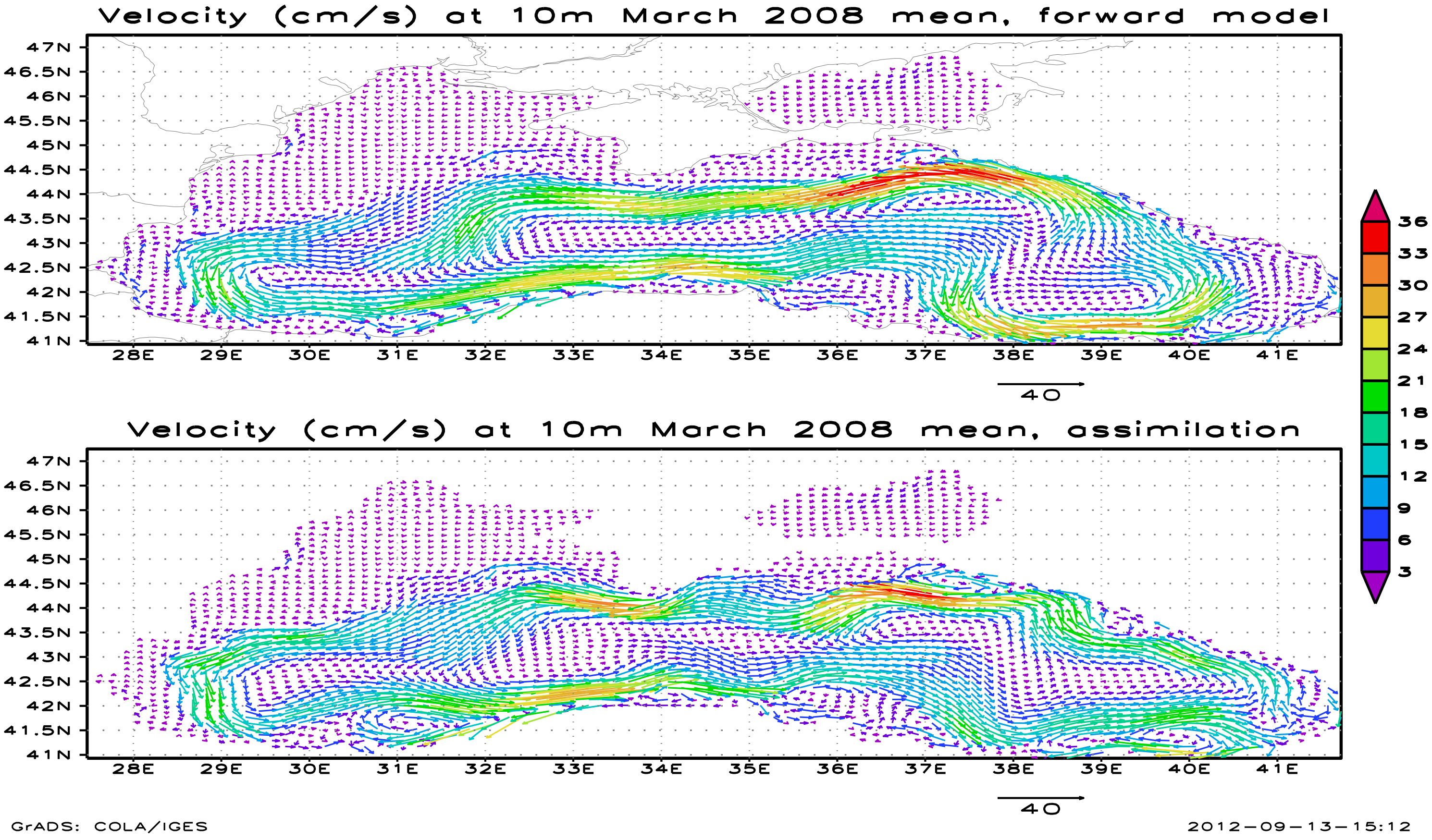
Среднемесячная температура: прямая модель, модель с ассимиляцией, данные наблюдений (сверху вниз). Июль, 100 м



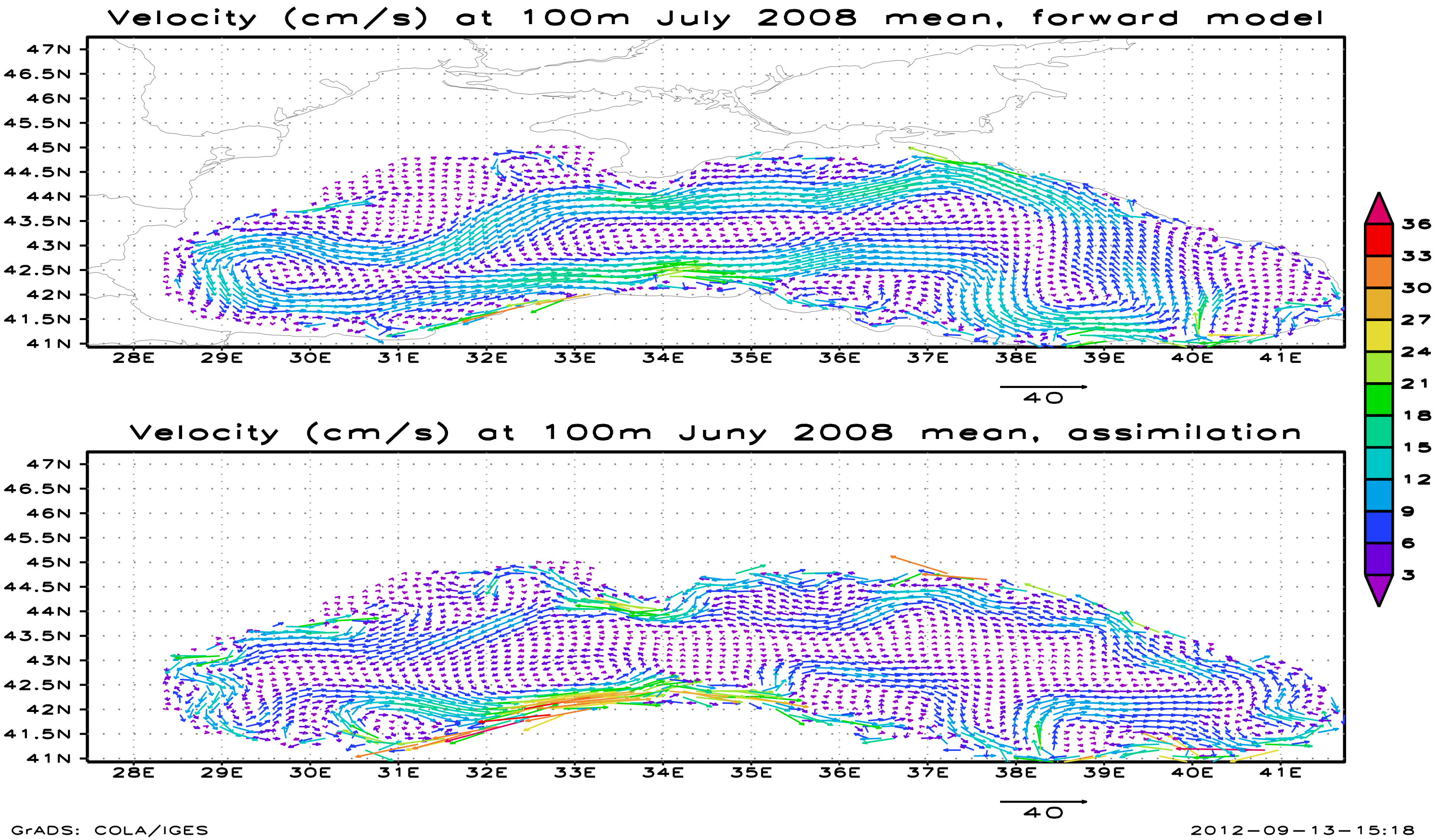
Среднемесячная соленость: прямая модель, модель с ассимиляцией, данные наблюдений (сверху вниз). Июль, 100 м



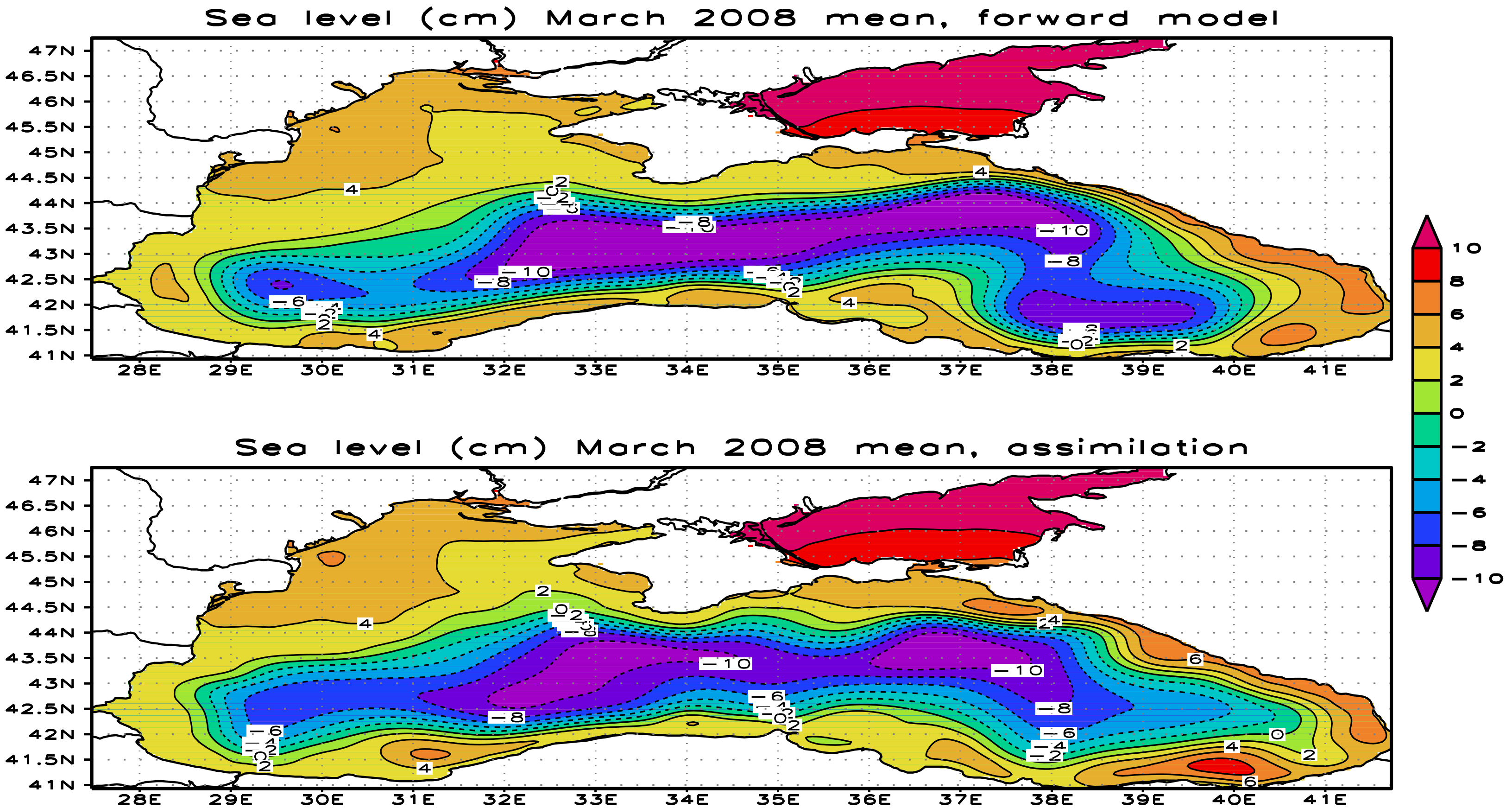
Среднемесячные течения: прямая модель, модель с ассимиляцией (сверху вниз). Март, 10 м



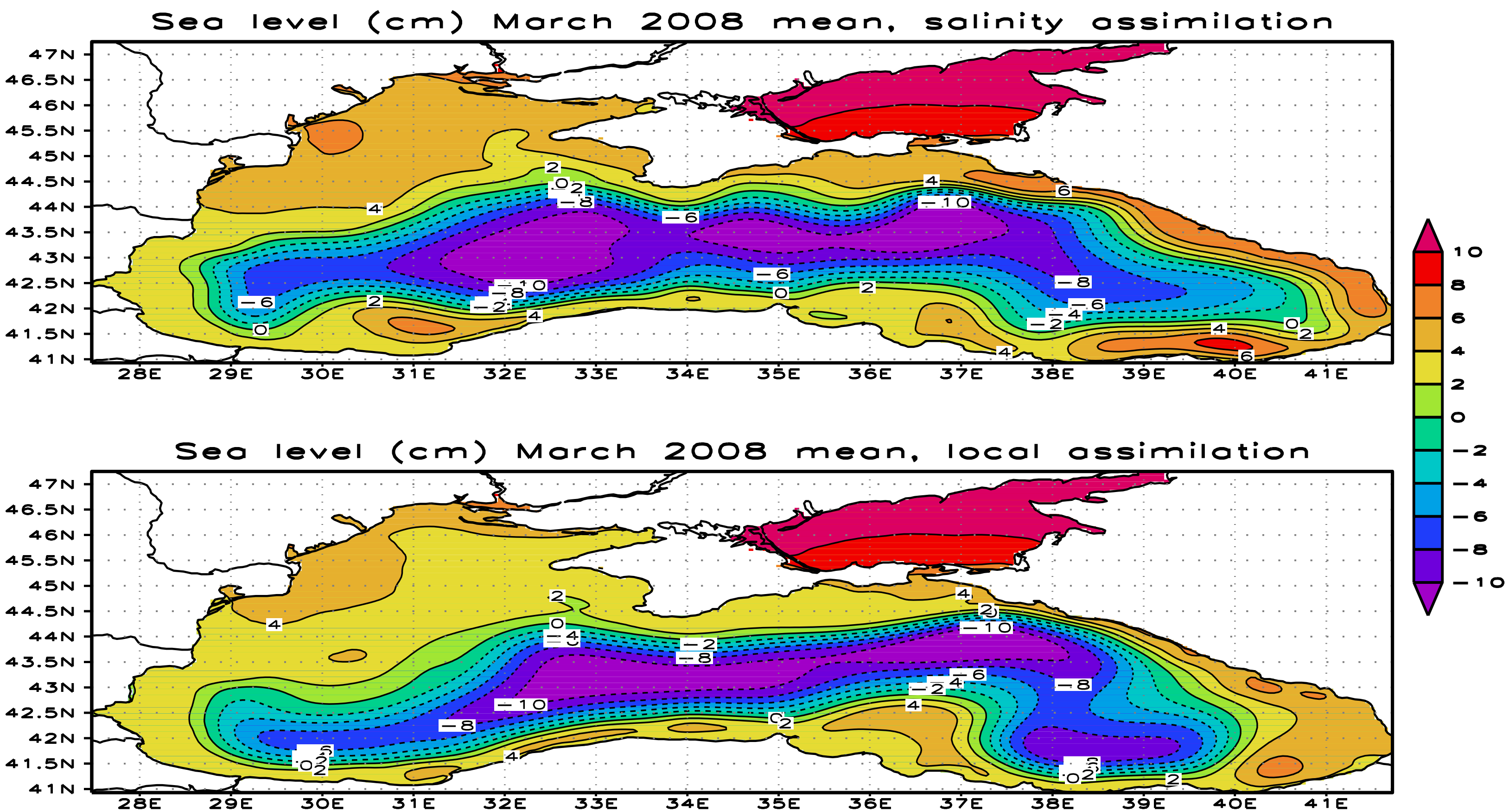
Среднемесячные течения: прямая модель, модель с ассимиляцией (внизу). Июль, 100 м



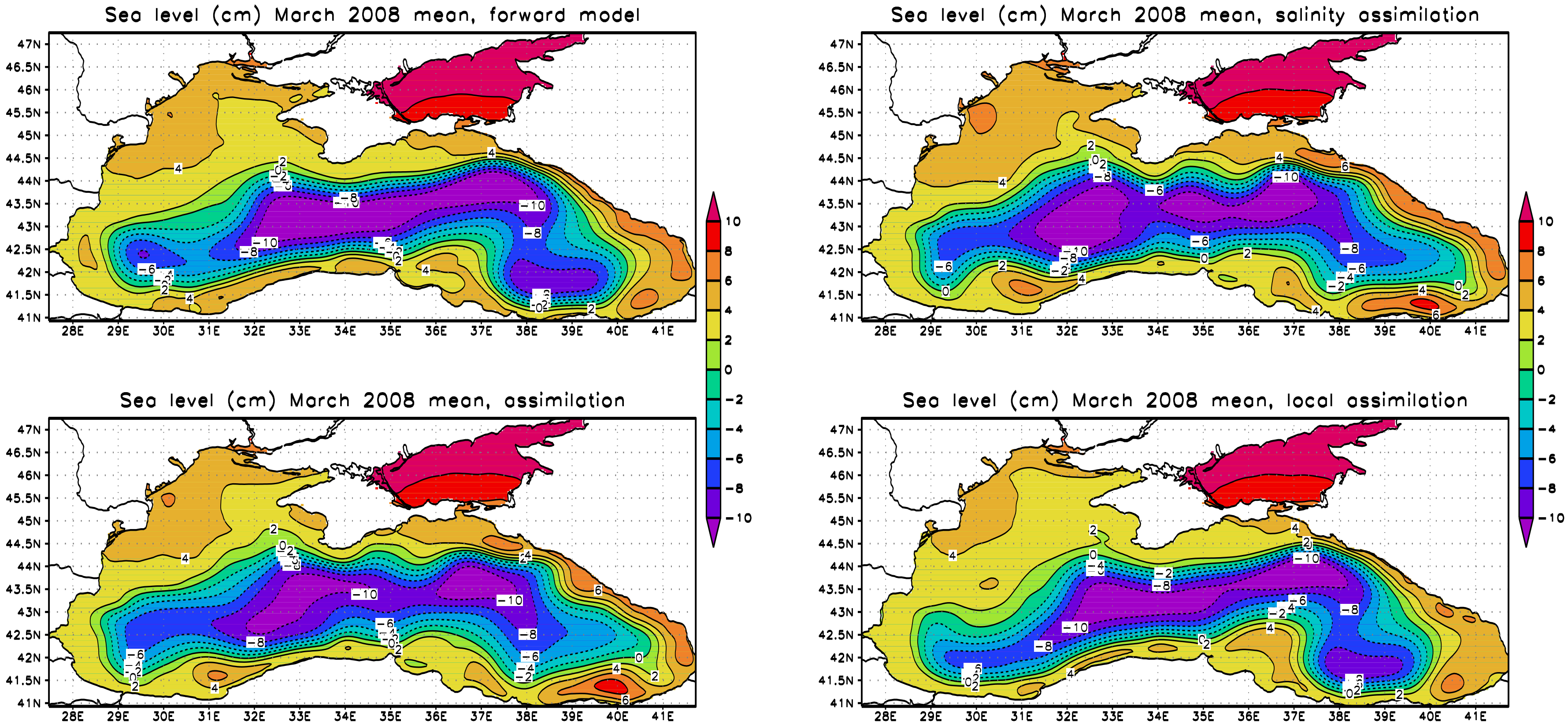
Среднемесячный уровень моря: прямая модель, модель с ассимиляцией T, S (внизу). Март



Среднемесячный уровень моря: модель с ассимиляцией S, локальной T, S (внизу). Март



Среднемесячный уровень моря: модель с ассимиляцией S, локальной T, S (внизу). Март



Негидростатическая модель Балтийского море (Тамсалу и др., 2008-2013)

- **Модуль негидростатической динамики – дополнительный этап расщепления**
- **k-ω параметризация турбулентности**
- **Модуль морской экосистемы**
- **Расчеты во вложенных подобластях (2008)**
- **Модель «с полюсом у Петербурга» (2013)**

Модель турбулентности

$$\begin{cases} D_t k = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_k}\frac{\partial k}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda}k + H\left(\boldsymbol{\nu}_u G^2 - \boldsymbol{\nu}_\rho N^2 - \boldsymbol{\varepsilon}\right) \\ D_t\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varepsilon} + H\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{k}\left(c_1^\varepsilon\boldsymbol{\nu}_u G^2 - c_3^\varepsilon\boldsymbol{\nu}_\rho N^2 - c_2^\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}\right) \\ D_t\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_\omega}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega} + H\frac{\boldsymbol{\omega}}{k}\left(c_1^\omega\boldsymbol{\nu}_u G^2 - c_3^\omega\boldsymbol{\nu}_\rho N^2 - c_2^\omega\boldsymbol{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(c_S^0\right)^4 k} \qquad G^2 = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{1}{H}\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{1}{H}\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^2 \qquad N^2 = \frac{1}{H}\frac{g}{\boldsymbol{\rho}_0}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_{pot}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\boldsymbol{\nu}_u = \frac{c_S^u}{c_S^0}\frac{k}{\boldsymbol{\omega}} \qquad \boldsymbol{\nu}_\rho = \frac{\boldsymbol{\nu}_u}{\mathrm{Pr}}$$

Расщепление (k-ω) модели турбулентности на 3 этапа

$$\begin{cases} D_t k = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dfrac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_k}\dfrac{\partial k}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda} k + H\left(\boldsymbol{\nu}_u G^2 - \boldsymbol{\nu}_\rho N^2 - \boldsymbol{\varepsilon}\right) \\ D_t\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dfrac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_\omega}\dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega} + H\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{k}\left(c_1^\omega\boldsymbol{\nu}_u G^2 - c_3^\omega\boldsymbol{\nu}_\rho N^2 - c_2^\omega\boldsymbol{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

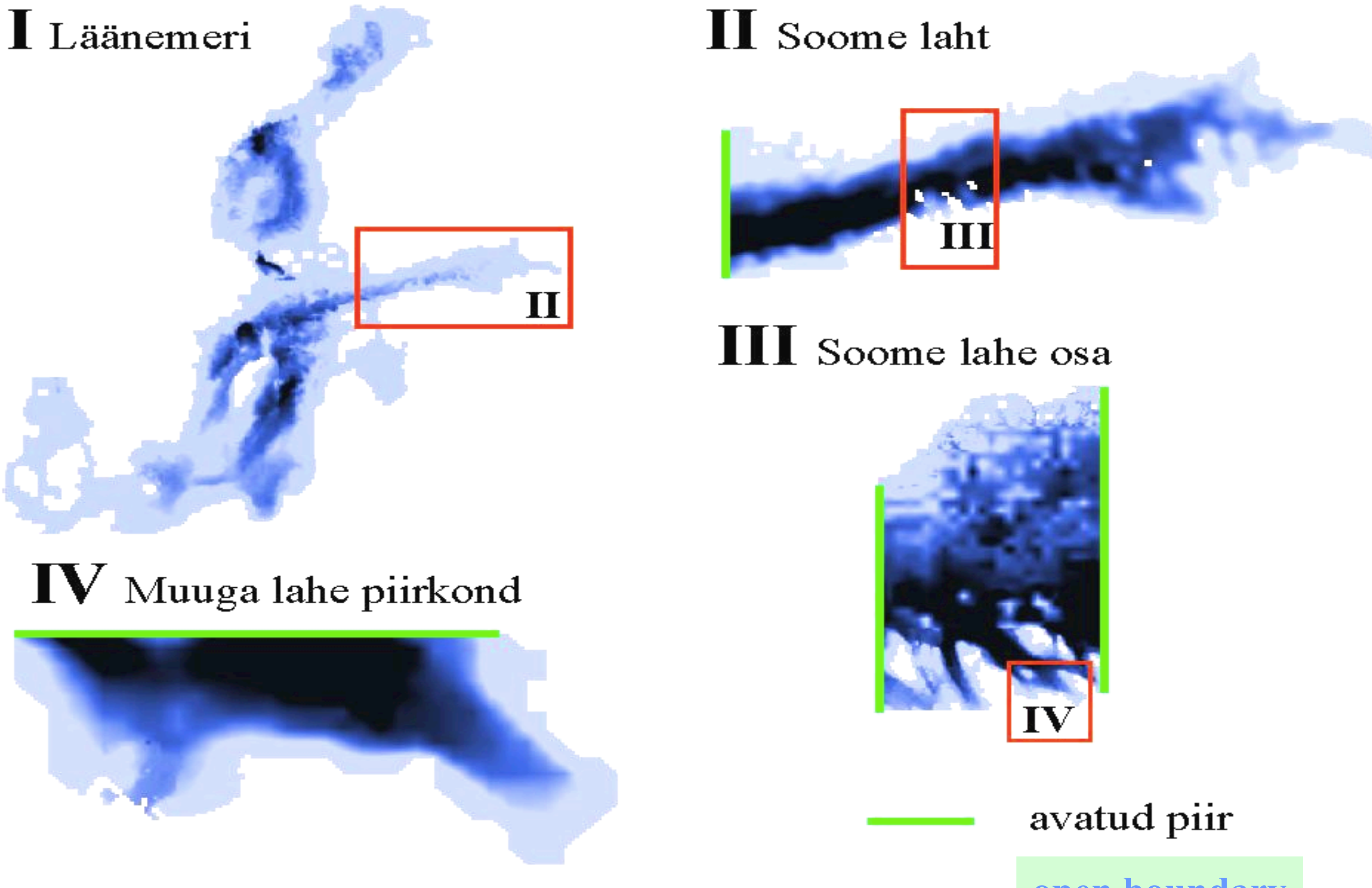
$$(1)\begin{cases} D_t k = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dfrac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_k}\dfrac{\partial k}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda} k \\ D_t\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dfrac{\boldsymbol{\nu}_u}{\boldsymbol{\sigma}_\omega}\dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial t} = \dfrac{c_S^u}{c_S^0}\left(G^2 - \dfrac{1}{\mathrm{Pr}}N^2\right)\dfrac{k}{\boldsymbol{\omega}} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \left(c_1^\omega G^2 - \dfrac{c_3^\omega}{\mathrm{Pr}}N^2\right)\dfrac{c_S^u}{c_S^0} \end{cases}$$

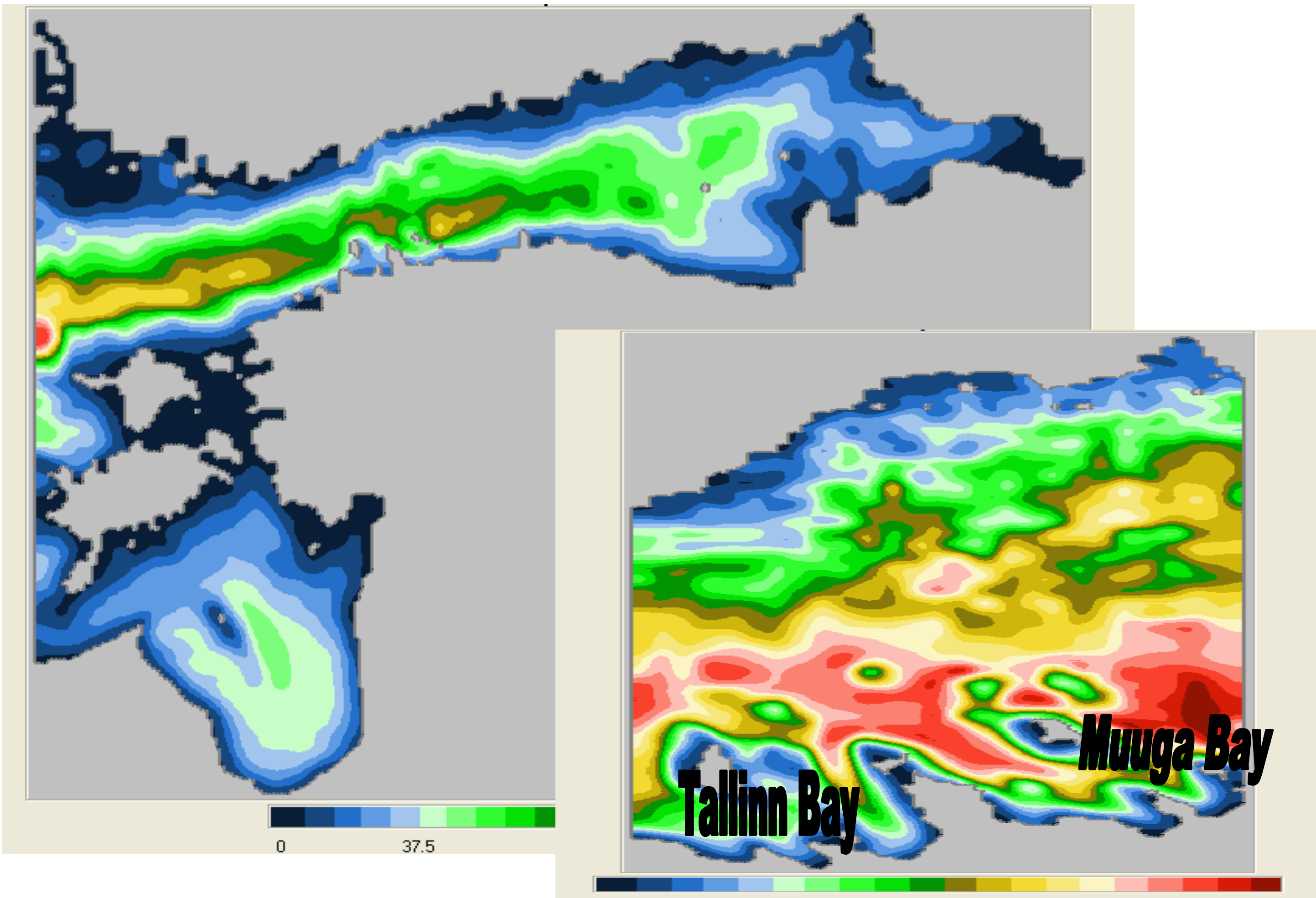
$$(3)\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial t} = -\left(c_S^0\right)^4\boldsymbol{\omega}\cdot k \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -c_2^\omega\left(c_S^0\right)^4\boldsymbol{\omega}^2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(c_S^0\right)^4 k\cdot\boldsymbol{\omega}$$

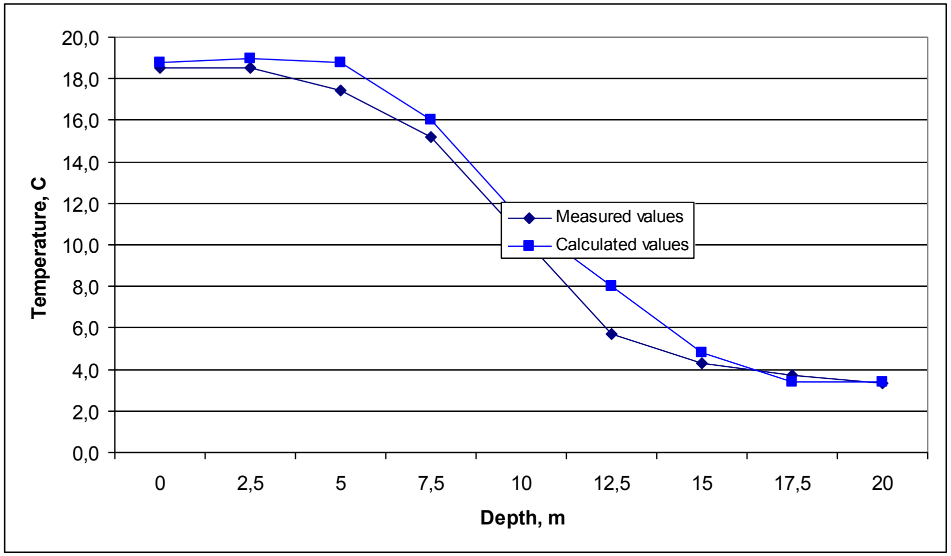
*Балтийское море. Разрешение в подобластях: (1) 3*3 nm; (2) 1*1 nm; (3) 1/4*1/4 nm; (4) 1/20*1/20 nm*

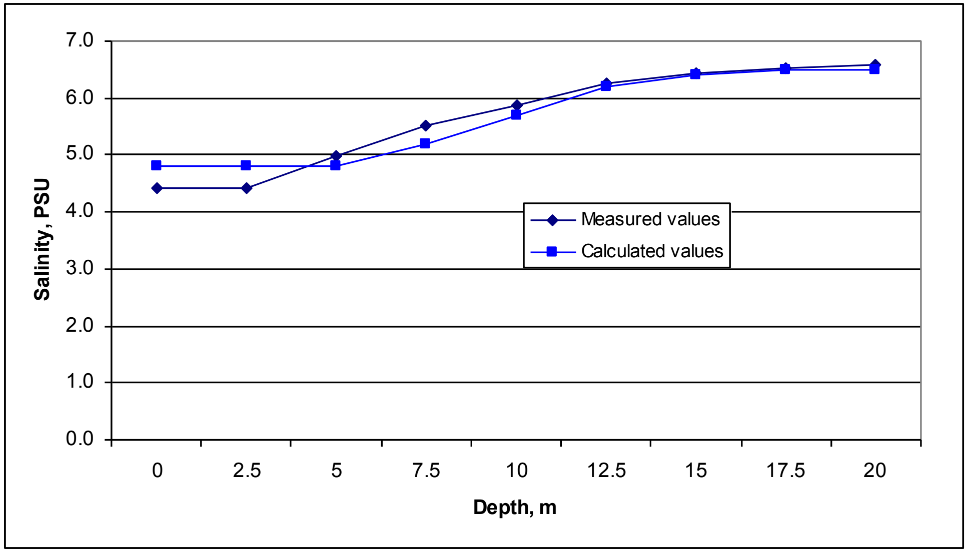


Глубина моря: Финский залив (1.85 км, слева), Таллинский залив (93 м, справа)

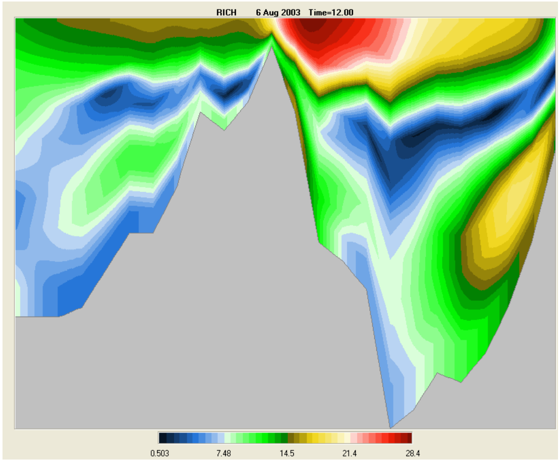


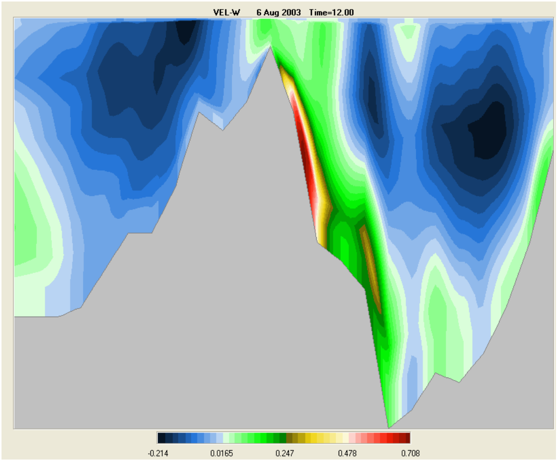
Бухта Мууга: сравнение с наблюдениями

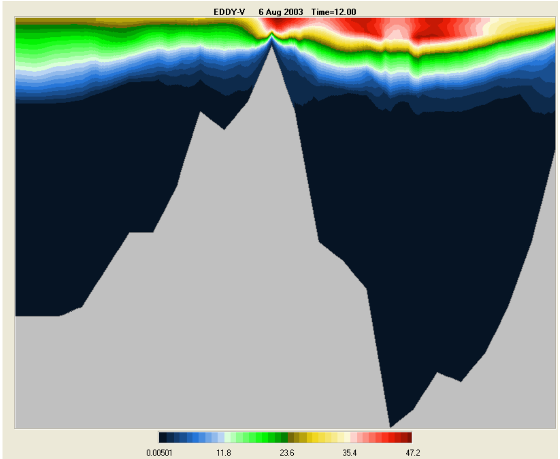


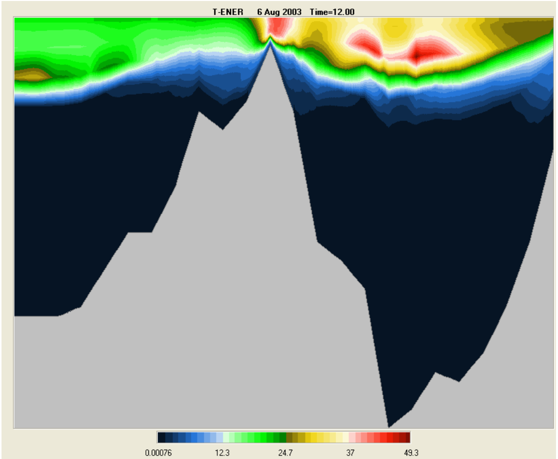


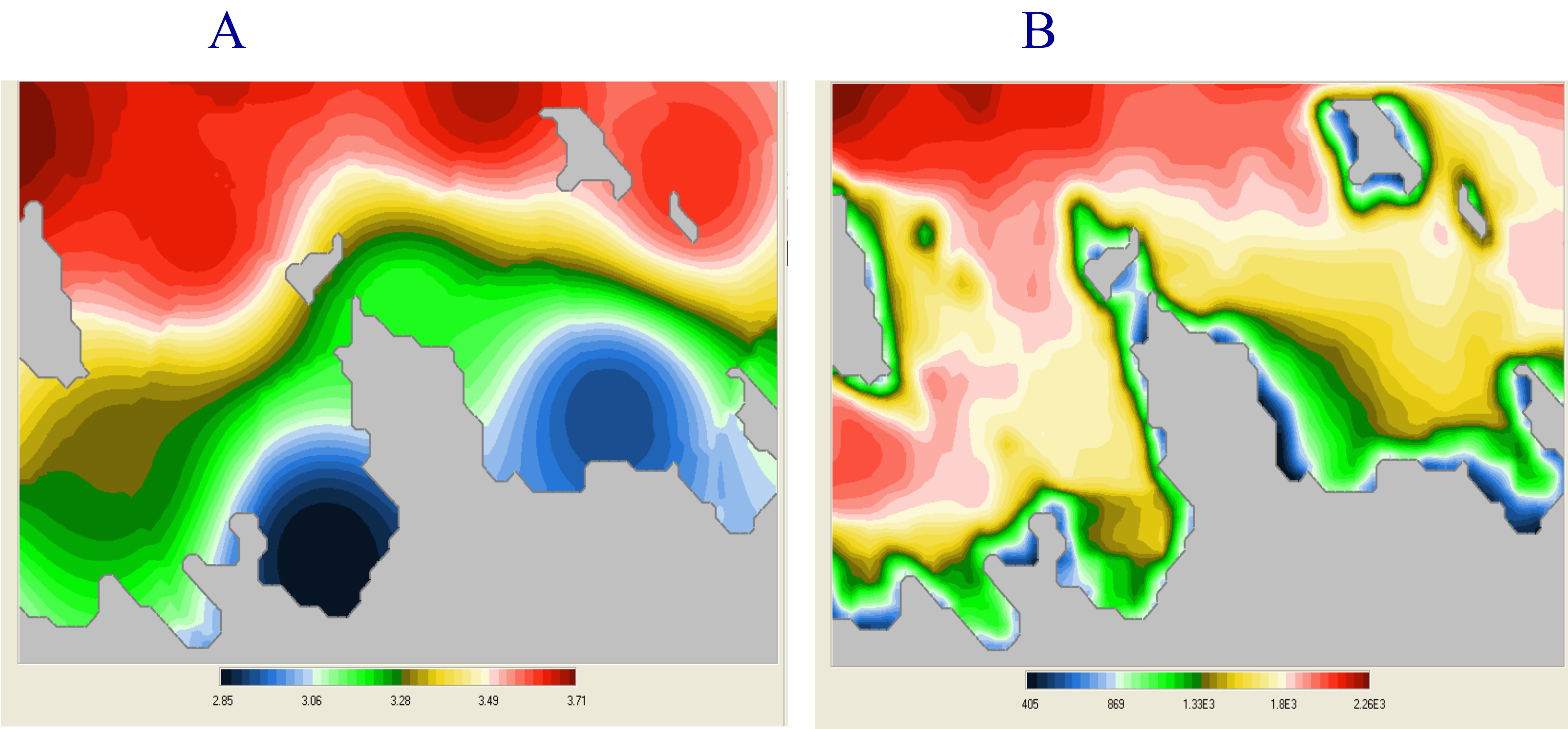
Таллинский залив. **Разрез вдоль 59.5 с.ш.: 1) скорость (см/с), 2) верникальная скорость (см/с), 3) коэфф. турбулентной вязкости, 4) кинетическая энергия (06.08.2003)**











Эффект разрушения ветровых волн. Кинетическая энергия на поверхности.

A. Без волн: $k(min) = 2.8$ см^2/с^2, $k(max) = 3.7$ см^2/с^2

B. С волнами: $k(min) = 40.5$ см^2/с^2, $k(max) = 226$ см^2/с^2

Загрязнение пассивной примесью. Сопряженная задача

$$H\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_x r_y}\frac{\partial}{\partial x}\left(Hr_y u\varphi\right)+\frac{Hu}{r_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{r_x r_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(Hr_x \mathrm{v}\varphi\right)+\frac{H\mathrm{v}}{r_y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\omega\varphi\right)+\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right]-$$

$$-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\sigma}\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}-\Lambda_{x,y}\varphi=0$$

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=Q \qquad \sigma=0$$

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=0 \qquad \sigma=1$$

$$J=\int_0^T\int_D\varphi(x,y,\sigma,t)\eta(x,y,\sigma,t)\,dD\,dt$$

$$J=\int_0^T\int_{D_0}\varphi^*(x,y,\sigma,t)Q(x,y,t)\,dD_0\,dt+\int_D\varphi^0\varphi^{*0}\,dD$$

Сопряженное уравнение, функция чувствительности Ф

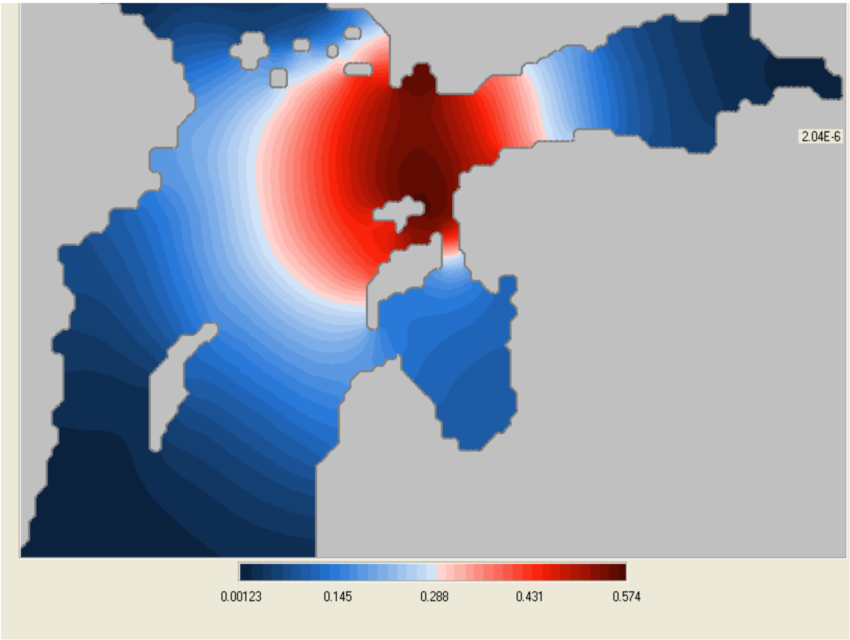
$$-H\frac{d\varphi^{*}}{dt}-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\sigma}\nu\frac{\partial\varphi^{*}}{\partial\sigma}-\Lambda_{x,y}\varphi^{*}=\eta\left(x,y,\sigma,t\right)$$

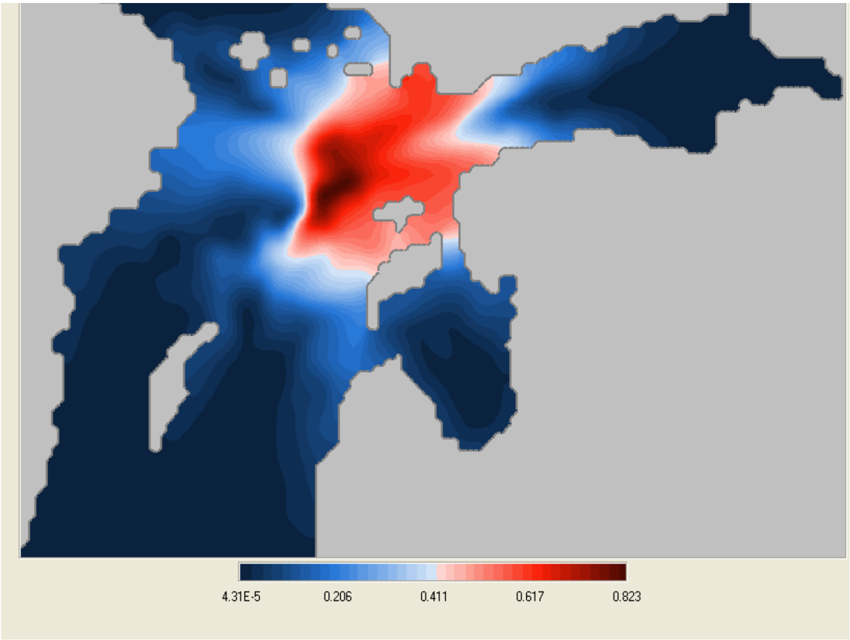
$$Q=\begin{cases}Q_0 & t\in\left(0,t_1\right)\\ 0 & t\in\left(t_1,T\right)\end{cases}$$

$$\delta J=\int_{D_0}\delta Q_0\left(x,y\right)\left(\int_0^{t_1}\varphi^{*}\left(x,y,\sigma,t\right)d\,t\right)dD_0$$

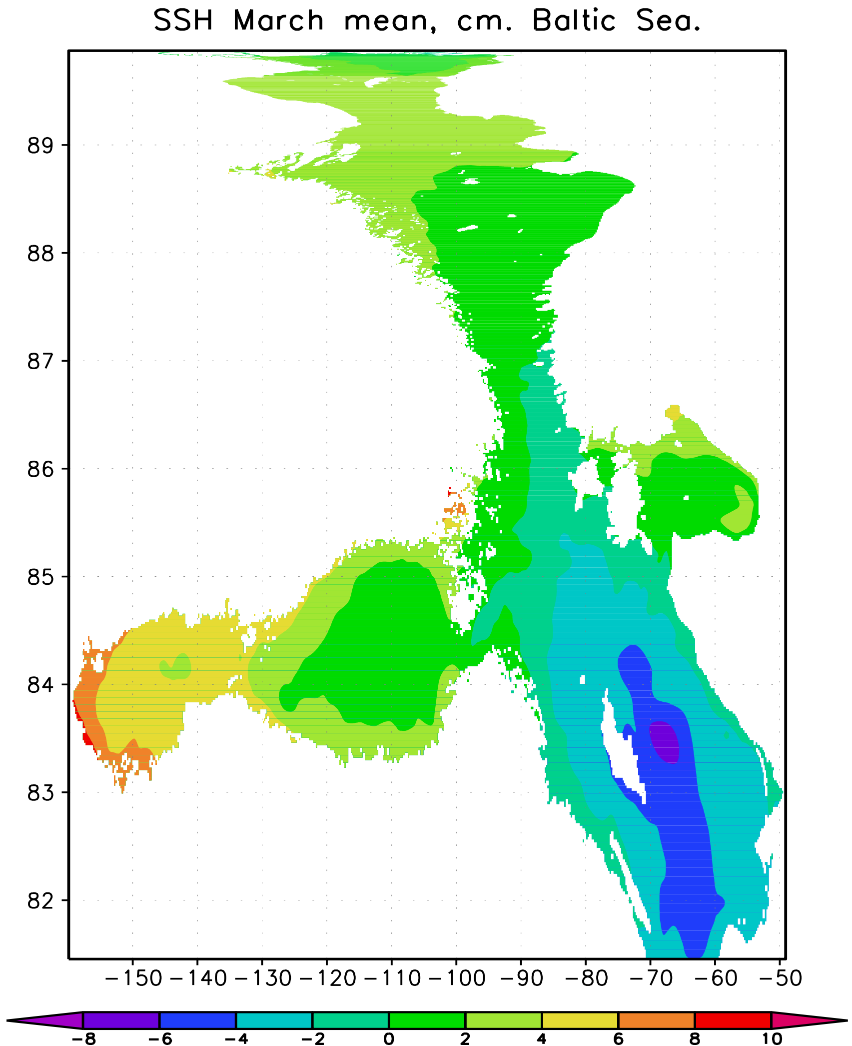
$$\Phi(x,y,\sigma)=\int_0^{t_1}\varphi^{*}(x,y,\sigma,t)\,dt$$

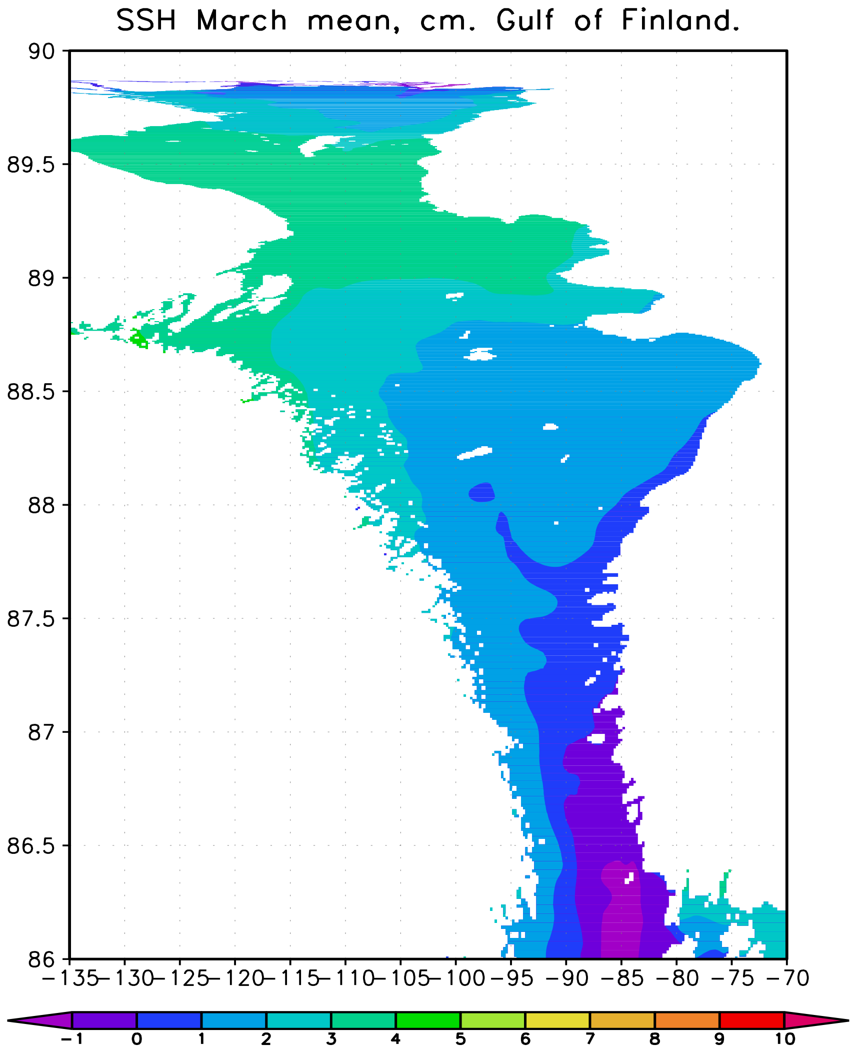
Сопряженная задача (о. Хиума). Функция влияния: поверхность, дно (справа), t=30 сут.



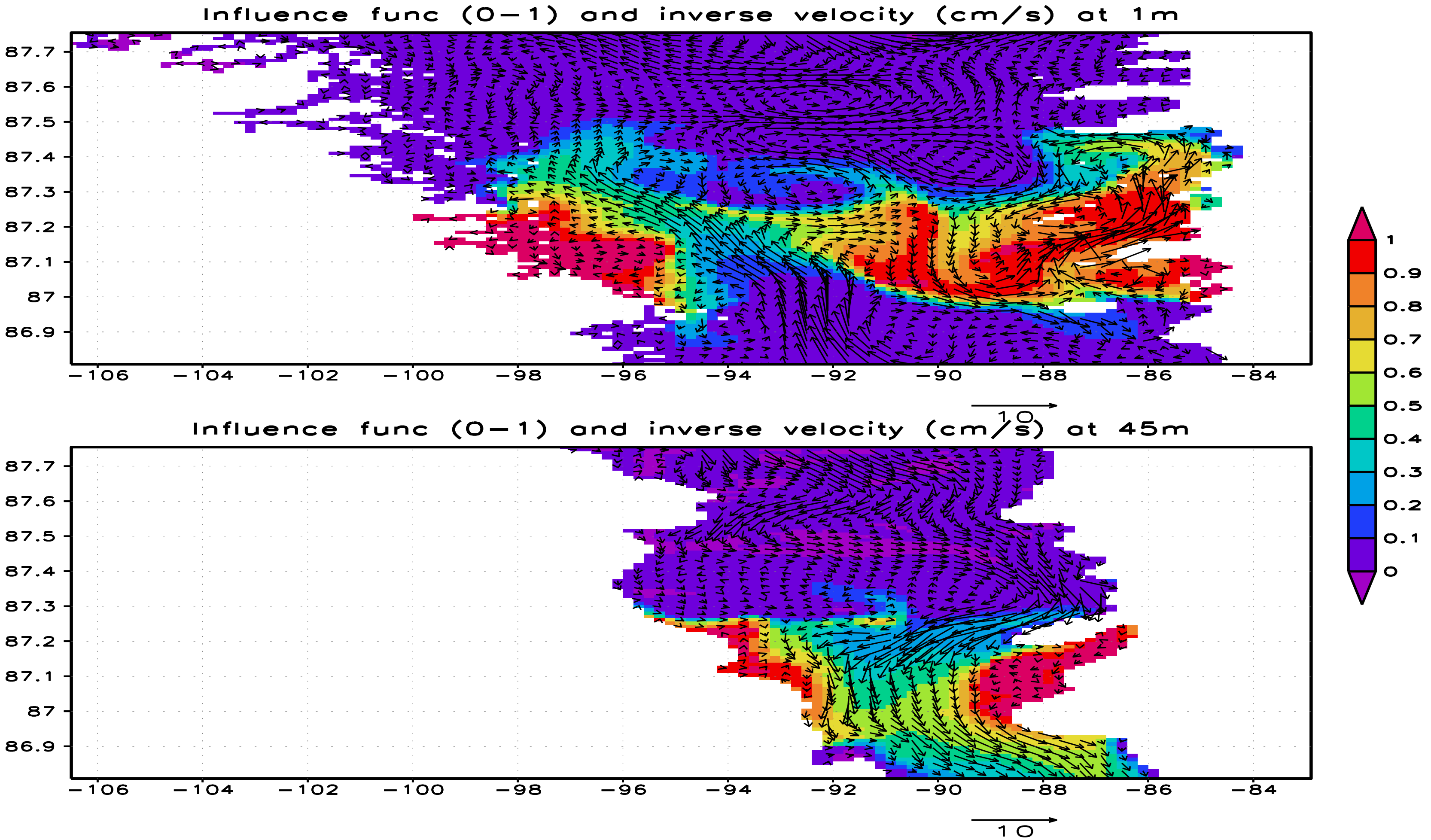


Модель Балтики, «полюс» у Петербурга. Уровень моря, март. Справа – Финский залив





Сопряженная задача (Таллин-Хельсинки). Функция влияния и «обратные течения»: поверхность, 45 м (справа), t=30 сут.



Заключение

- Исследование корректности математических задач динамики океана
- Эволюционная форма уравнений динамики океана. Выделение баротропной циркуляции
- Метод расщепления. Симметризация уравнений, негидростатическая модель.
- Метод сопряженных уравнений, вариационная ассимиляция. Сочетание методов расщепления и сопряженных уравнений
- Метод сопряженных уравнений. Анализ чувствительности сложных систем. Энергоактивные зоны океана