Динамические игры в задачах природопользования

Владимир В. Мазалов (Петрозаводск, Август 25-26, 2013)

Институт прикладных математических исследований,
Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия
E-mail : vmazalov@krc.karelia.ru

Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (13-01-00033-а) И Отделением Математических Наук РАН

Введение

В динамических играх игра развивается во времени. При этом, игроки управляют некоторым объектом или системой, динамика которой описывается системой разностных или дифференциальных уравнений.

Определение 1. Динамической игрой будем называть игру $\Gamma =< N, x, \{U_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n >$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$ - множество игроков,

$$x'(t) = f(x, u_1, ..., u_n, t),\ x(0) = x_0,\ x = (x_1, ..., x_m),\ 0 \leq t \leq T,$$

управляемая система в пространстве R^m, $U_1, ..., U_n$ -множества стратегий игроков $1, ..., n$, и $H_i(u_1, ..., u_n)$ выигрыш игрока $i \in N$.

Управляемая система рассматривается на интервале времени $[0, T]$, который может быть как конечным так и бесконечным. Стратегии игроков представляют собой функции $u_i = u_i(t), i = 1, ..., n$. В зависимости от выбранных стратегий каждый из игроков получает выигрыш

$$H_i(u_1, ..., u_n) = \int_0^T g_i(x(t), u_1(t), ..., u_n(t), t)dt + G_i(x(T), T), i = 1, ..., n,$$

который состоит из **интегральной и терминальной** составляющих и где $g_i, G_i, i = 1, ..., n$ -заданные функции.

Существуют кооперативные и некооперативные динамические игры. В некооперативных играх под решением понимается равновесие по Нэшу.

Определение 2. Равновесием по Нэшу в игре Γ называется набор стратегий $(u_1^*, ..., u_n^*)$, для которого выполняются следующие условия

$$H_i(u_{-i}^*, u_i) \leq H_i(u^*)$$

для произвольных стратегий $u_i, i = 1, ..., n$.

1. Рыбные войны

Рассмотрим динамическую систему (рыбная популяция), которая описывается системой разностных уравнений

$$x_{t+1} = (x_t)^{\alpha}, \ t = 0, 1, ...,$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Задано начальное состояние системы x_0.

У данной системы существует стационарное состояние $x = 1$. Если $x_0 > 1$, то популяция убывает, неограниченно приближаясь к $x = 1$, если же $x_0 < 1$, то возрастает с такой же асимптотой.

Две страны (игроки) ловят рыбу и заинтересованы максимизировать свой доход на некотором интервале времени. Функция полезности каждого игрока зависит от добытой им рыбы u и имеет вид $\ln(u)$. Коэффициенты дисконтирования $\beta_1, \beta_2, \ 0 < \beta_i < 1, \ i = 1, 2$.

1.1. Равновесие по Нэшу в динамической игре

Одношаговая модель. Предположим, что игроки решили выловить в начальный момент времени u_1 и u_2 ($u_1+u_2 \le x_0$). В следующий момент времени $t = 1$ размер популяции станет равным $x_1 = (x_0 - u_1 - u_2)^\alpha$.

Игра заканчивается, игроки делят оставшееся количество рыбы пополам.

Выигрыш первого игрока составит величину

$$\begin{aligned} H_1(u_1, u_2) &= \ln u_1 + \beta_1 ln\left(\tfrac{1}{2}(x - u_1 - u_2)^\alpha\right) = \\ &= \ln u_1 + \alpha\beta_1 \ln(x - u_1 - u_2) - \beta_1 \ln 2,\ x = x_0. \end{aligned}$$

Выигрыш второго игрока

$$H_2(u_1, u_2) = \ln u_2 + \alpha\beta_2 \ln(x - u_1 - u_2) - \beta_2 \ln 2,\ x = x_0.$$

Функции $H_1(u_1, u_2)$ и $H_2(u_1, u_2)$ выпуклы, поэтому существует равновесие по Нэшу.

$\partial H_1/\partial u_1 = 0$, $\partial H_2/\partial u_2 = 0$, или

$$\frac{1}{u_1} - \frac{\alpha\beta_1}{x - u_1 - u_2} = 0,\ \frac{1}{u_2} - \frac{\alpha\beta_2}{x - u_1 - u_2} = 0.$$

Отсюда находим равновесие

$$u_1' = \frac{\alpha\beta_2}{(1+\alpha\beta_1)(1+\alpha\beta_2) - 1} \cdot x,\ u_2' = \frac{\alpha\beta_1}{(1+\alpha\beta_1)(1+\alpha\beta_2) - 1} \cdot x,$$

при этом размер популяции после вылова станет равным

$$x - u_1' - u_2' = \frac{\alpha^2\beta_1\beta_2}{(1+\alpha\beta_1)(1+\alpha\beta_2) - 1} \cdot x,$$

Выигрыши игроков в равновесии

$$H_1(u_1', u_2') = (1 + \alpha\beta_1) \ln x + a_1, \;\; H_2(u_1', u_2') = (1 + \alpha\beta_2) \ln x + a_2,$$

где a_1, a_2 определяются соотношениями

$$a_i = \ln\left(\frac{\alpha\beta_j(\alpha^2\beta_1\beta_2)^{\alpha\beta_i}}{[(1+\alpha\beta_1)(1+\alpha\beta_2)-1]^{1+\alpha\beta_i}}\right) - \beta_i \ln 2, \;\; i, j = 1, 2, \; i \neq j.$$

Два шага. Игроки имеют возможность сделать вылов два раза.

Оптимальное поведение и выигрыши игроков на последнем шаге мы уже знаем, правда уже с другим начальным условием. Следовательно, равновесие в двухшаговой модели сводится к задаче максимизации выигрышей игроков вида

$$H_1^2(u_1,u_2) = \ln u_1 + \alpha\beta_1(1+\alpha\beta_1)\ln(x-u_1-u_2) + \beta_1 a_1,\ x = x_0,$$

$$H_2^2(u_1,u_2) = \ln u_1 + \alpha\beta_2(1+\alpha\beta_2)\ln(x-u_1-u_2) + \beta_2 a_2,\ x = x_0.$$

Функции выигрыша сохранили выпуклость. Находим равновесие по Нэшу из системы уравнений

$$\frac{1}{u_1} - \frac{\alpha\beta_1(1+\alpha\beta_1)}{x-u_1-u_2} = 0,\ \frac{1}{u_2} - \frac{\alpha\beta_2(1+\alpha\beta_2)}{x-u_1-u_2} = 0.$$

Оно опять принимает линейный вид

$$u_1^2 = \frac{\alpha\beta_2(1+\alpha\beta_2)}{(1+\alpha\beta_1)(1+\alpha\beta_2)-1}\cdot x,\ \ u_2^2 = \frac{\alpha\beta_1(1+\alpha\beta_1)}{(1+\alpha\beta_1)(1+\alpha\beta_2)-1}\cdot x.$$

Продолжая эти построения дальше, приходим к выводу, что в n-шаговой игре оптимальные стратегии имеют вид

$$u_1^n = \frac{\alpha\beta_2\sum\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha\beta_2)^j}{\sum\limits_{j=0}^{n}(\alpha\beta_1)^j\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha\beta_2)^j-1}\cdot x,\ \ u_2^n = \frac{\alpha\beta_1\sum\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha\beta_1)^j}{\sum\limits_{j=0}^{n}(\alpha\beta_1)^j\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha\beta_2)^j-1}\cdot x. \tag{1.1}$$

После данного вылова размер популяции становится равным

$$x - u_1^n - u_2^n = \frac{\alpha^2\beta_1\beta_2 \sum\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha\beta_1)^j \sum\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha\beta_2)^j}{\sum\limits_{j=0}^{n}(\alpha\beta_1)^j \sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha\beta_2)^j - 1} \cdot x. \tag{1.2}$$

При $n \to \infty$ выражения (1.1), (1.2) имеют предел

$$u_1^* = \frac{\alpha\beta_2(1-\alpha\beta_1)x}{1-(1-\alpha\beta_1)(1-\alpha\beta_2)},\ u_2^* = \frac{\alpha\beta_1(1-\alpha\beta_2)x}{1-(1-\alpha\beta_1)(1-\alpha\beta_2)}.$$

Соответственно,

$$x - u_1^* - u_2^* = \lim_{n\to\infty} x - u_1^n - u_2^n = kx,$$

где

$$k = \frac{\alpha^2\beta_1\beta_2 x}{1-(1-\alpha\beta_1)(1-\alpha\beta_2)}.$$

Бесконечный временной горизонт. Предположим на каждом шаге игроки используют стратегии u_1^*, u_2^*. Стартуя из начального состояния x_0, система будет развиваться по закону

$$x_{t+1} = (x_t - u_1^*(x_t) - u_2^*(x_t))^\alpha = k^\alpha x_{t-1}^\alpha = k^\alpha (k x_{t-1}^\alpha)^\alpha = k^{\alpha+\alpha^2} x_{t-1}^{\alpha^2} = \ldots$$

$$= k^{\sum\limits_{j=1}^{t} \alpha^j} \cdot x_0^{\alpha^t},\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

При больших t система будет приближаться к стационарному состоянию

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha\beta_1} + \frac{1}{\alpha\beta_2} - 1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (1.3)$$

При $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ стационарное состояние имеет вид $\bar{x} = \left(\frac{\alpha\beta}{2-\alpha\beta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Линейный случай. В этом случае динамика популяции имеет вид

$$x_{t+1} = r(x_t - u_1 - u_2),\ r > 1.$$

Оптимальные стратегии игроков в равновесии по Нэшу в многошаговой игре с конечным горизонтом

$$u_1^n = \frac{\beta_2 \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\beta_2)^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} (\beta_1)^j \sum\limits_{j=1}^{n} (\beta_2)^j - 1} \cdot x,\ u_2^n = \frac{\beta_1 \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\beta_1)^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} (\beta_1)^j \sum\limits_{j=1}^{n} (\beta_2)^j - 1} \cdot x,$$

которые в пределе при $n \to$ приводят к стратегиям вида

$$u_1^* = \frac{\beta_2(1-\beta_1)x}{1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)},\ u_2^* = \frac{\beta_1(1-\beta_2)x}{1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)}.$$

Так как

$$x - u_1^* - u_2^* = \frac{x}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1},$$

динамика популяции при использовании игроками оптимальных стратегий примет вид

$$x_t = \frac{r}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1} \cdot x_{t-1} = \left(\frac{r}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1} \right)^t x_0, \ t = 0, 1, \ldots$$

Динамика популяции в равновесии существенно зависит от значения коэффициента $r/(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} - 1)$. Если он меньше единицы, популяция вырождается, если больше единицы – неограниченно возрастает, и если он равен единице, то размер популяции поддерживается на стабильном уровне. В случае равных факторов дисконтирования $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, развитие или исчезновение популяции определяются знаком выражения $\beta(r + 1) - 2$.

1.2. Кооперативное равновесие в динамической игре

Вернемся к начальной модели $x_t = x_{t-1}^{\alpha}$, $\alpha < 1$, и предположим, что игроки договорились осуществлять совместные действия. Будем считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Общее управление обозначим $u = u_1 + u_2$. Такие же рассуждения, как и выше, дают оптимальную стратегию в n-шаговой игре

$$u^n = \frac{1 - \alpha\beta}{1 - (\alpha\beta)^{n+1}} \cdot x,$$

с предельной стратегией $u^* = (1 - \alpha\beta)x$. Тогда динамика популяции в кооперативном равновесии имеет вид

$$x_t = (\alpha\beta x_{t-1})^{\alpha} = (\alpha\beta)^{\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^t} \cdot x_0^{\alpha^t},\ t = 0, 1, \ldots,$$

приближаясь при больших t к стационарному состоянию

$$\hat{x} = (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (1.4)$$

Сравнивая стационарные состояния (1.3) и (1.4) в кооперативном равновесии и равновесии по Нэшу, мы видим, что

$$\widehat{x} = (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \geq \bar{x} = \left(\frac{\alpha\beta}{2-\alpha\beta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

т.е. кооперативные действия дают более высокий размер популяции. Сравним выигрыши игроков в этих равновесиях.
В кооперативном равновесии игроки на каждом шаге получают суммарный выигрыш

$$u_c = (1-\alpha\beta)\widehat{x} = (1-\alpha\beta)(\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \qquad (1.5)$$

Играя некооперативно, сумма их выигрышей составит величину (при $\beta_1 = \beta_2$)

$$u_n = u_1^* + u_2^* = \frac{2\alpha\beta(1-\alpha\beta)}{1-(1-\alpha\beta)^2}\cdot\bar{x} = \frac{2(1-\alpha\beta)}{2-\alpha\beta}\left(\frac{\alpha\beta}{2-\alpha\beta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (1.6)$$

Так как

$$2 < (2 - \alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ 0 < \alpha, \beta < 1,$$

то $u_c > u_n$. Таким образом, кооперативное поведение не только приводит к благоприятному сценарию для популяции, но также и дает игрокам больший выигрыш, нежели они будут действовать каждый сам по себе.

Линейный случай $x_{t+1} = rx_t, t = 0, 1, ...$ В этом случае при кооперативном поведении $u = (1 - \beta)x$ динамика популяции имеет вид

$$x_t = r\beta x_{t-1} = ... = (r\beta)^t x_0 \ t = 0, 1, ...$$

и ее стационарное состояние зависит от значения $r\beta$. При значении этого выражения больше единицы популяция неограниченно возрастает, при значении меньше единицы вырождается, и при $\beta = 1/r$ остается на постоянном уровне. В силу того, что $r\beta/(2-\beta) \leq r\beta$, возможна такая ситуация, когда $r\beta > 1$ и $r\beta/(2-\beta) < 1$. Это означает, что при кооперативном поведении игроков популяция будет неограниченно увеличиваться во времени, в то время, как при эгоистическом поведении, когда каждый из игроков действует, руководствуясь только своими интересами, популяция вырождается.

2. Динамически устойчивая процедура распределения дележа

Несколько стран (игроки) $I = \{1, 2, ..., n\}$ планируют вылов рыбы в океане. Динамика рыбных запасов

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t)\,, \;\; x_0 = x\,,$$

где $u_t = (u_{1t}, ..., u_{nt})$, x_t – величина рыбных запасов в момент t, u_{it} – улов игрока i, $i = 1, \ldots, n$.

Каждый из игроков заинтересован максимизировать свой доход, который выражается как сумма дисконтированных доходов

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(u_{it})\,,$$

где $g_i(u_{it})$ – выигрыш игрока i в момент t, δ – параметр дисконтирования, $0 < \delta < 1$.

При кооперативном поведении целью игроков является максимизировать сумму доходов всех участников $\sum_{i=1}^{n} J_i$.

Обозначим $u_t^c = (u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c)$ оптимальные стратегии игроков при таком кооперативном поведении, соответствующее поведение экологической системы обозначим x_t^c.

Если же кооперациии не получится, каждая из стран будет заинтересована максимизировать свой индивидульный доход. Обозначим $u_t^N = (u_{1t}^N, \ldots, u_{2t}^N)$ – равновесие по Нэшу в данной динамической игре. При этом, суммарный выигрыш

$$J^N = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^{n} g_i(u_{it})\,.$$

будет естественно меньше.

Какие-то страны могут образовать коалицию и тогда выигрыш коалиции $S \in N$ обозначим $J^S(u) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum\limits_{i \in S} g_i(u_{it})$.

Если процесс пойдет по кооперативному сценарию, то возникнет необходимость в дележе дохода. Для этого воспользуемся методами кооперативной теории игр. Определим характеристическую функцию $V(S,0)$ как доход коалиции S в равновесии, когда все игроки коалиции S играют как один игрок, а все другие игроки играют индивидульно. Тогда

$$V(S,0) = \max_{u_i, i \in S} J^S(u^N/u^S),$$

где $(u^N/u^S) = \{u_j^N, j \notin S, u_i, i \in S\}$.

Рассмотрим два сценария поведения игроков, не входящих в коалицию. В первом, эти игроки продолжают использовать стратегии, которые у них были в равновесии по Нэшу, до того как образовалась коалиция S. Это соответствует модели, когда игрокам не сообщается об образовании коалиции. Во втором сценарии игроки вне коалиции S узнают о сформировавшейся коалиции и определяют свои новые стратегии, формируя равновесие по Нэшу в игре с $N\backslash K$ игроками. Будем называть эти сценарии как модели без информации и с информацией, соответственно.

После того, как найдена характеристическая функция, строим множество дележей

$$\xi = \{\xi(0) = (\xi_1(0), \ldots, \xi_n(0)) : \\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0) = V(N, 0), \xi_i(0) \geq V(i, 0),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Аналогичным образом, может быть определена характеристическая функция $V(S,t)$ и множество дележей $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ в момент t для любой подыгры, начинающейся из состояния x_t^c.

Принципы кооперативной теории игр: арбитражное решение Нэша, C–ядро, вектор Шепли и др. Если принцип выбора дележа выбран, далее он не меняется.

Определение. Вектор-функция $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ формирует процедуру распределения дележа (ПРД),если

$$\xi_i(0) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \beta_i(t)\,,\; i = 1, \ldots, n\,.$$

Идея – распределить кооперативный выигрыш вдоль траектории игры. β_i - платеж игроку i в момент t.

Определение. Вектор-функция $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ формирует динамически-устойчивую ПРД, если для любого $t \geq 0$

$$\xi_i(0) = \sum_{\tau=0}^{t} \delta^\tau \beta_i(\tau) + \delta^{t+1} \xi_i(t+1)\,,\ i = 1, \ldots, n\,.$$

Игроки, следуя кооперативной траектории, и далее смогут получать платежи в форме ПРД, поэтому у них нет оснований выйти из кооперативного соглашения.

Теорема 1. Вектор-функция $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ где

$$\beta_i(t) = \xi_i(t) - \delta \xi_i(t+1)\,, i = 1, 2, \ldots, n$$

формирует динамически устойчивую ПРД.

Доказательство. Из определения

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \beta_i(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \xi_i(t) - \sum_{t=0}^{\infty} \delta^{t+1} \xi_i(t+1) = \xi_i(0)\,,$$

таким образом $\beta(t)$ формирует ПРД. Докажем динамическую устойчивость ПРД.

Это следует из следующих равенств

$$\sum_{\tau=0}^{t} \delta^{\tau} \beta_i(\tau) + \delta^{t+1} \xi_i(t+1) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{t} \delta^{\tau} \xi_i(\tau) - \sum_{\tau=0}^{t} \delta^{\tau+1} \xi_i(\tau+1) + \delta^{t+1} \xi_i(t+1) = \xi_i(0).$$

Определение. *Дележ* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *удовлетворяет условию защиты от иррационального поведения, если*

$$\sum_{\tau=0}^{t} \delta^{\tau} \beta_i(\tau) + \delta^{t+1} V(i, t+1) \geq V(i, 0)$$

для всех $t \geq 0$, *где* $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ *– динамически устойчивая ПРД.*

Это условие гарантирует участникам кооперации, что даже в случае расторжения кооперативного соглашения их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении.

Это условие в нашей модели принимает вид:

$$\xi_i(0) - \xi_i(t)\delta^t \geq V(i, 0) - \delta^t V(i, t), \; i = 1, \dots, n.$$

Более сильное условие

Определение. *Дележ* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *удовлетворяет условию, стимулирующему рациональное поведение на каждом шаге, если*

$$\beta_i(t) + \delta V(i, t+1) \geq V(i, t) \qquad (1.1)$$

для всех $t \geq 0$, *где* $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ – *динамически устойчивая ПРД.*

Предложенное условие дает стимул игроку поддерживать кооперацию, поскольку на каждом шаге он получает больше выгоды от кооперации, чем от некооперативного поведения.

$$\xi_i(t) - \delta\xi_i(t+1) \geq V(i, t) - \delta V(i, t+1),\ i = 1, \ldots, n. \qquad (1.2)$$

3. "Рыбные"войны

n стран осуществляют вылов рыбы в течение фиксированного промежутка времени. Динамика изменения биоресурса имеет вид (Levhari, Mirman [1980])

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - \sum_{i=1}^{n} u_{it})^{\alpha}\,, \;\; x_0 = x\,,$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент t, $\varepsilon \in (0,1)$ – параметр смертности, $\alpha \in (0,1)$ – параметр рождения, $u_{it} \geq 0$ – улов игрока i, $i = 1, \dots, n$. Доходы игроков

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{it})\,, i = 1, ..., n.$$

3.1. Модель с отсутствием информацией

Построим характеристическую функцию в случае, когда игроки, образовавшие коалицию, не сообщают об этом другим игрокам.

Равновесие по Нэшу. Уравнение Беллмана

$$V_i(x) = \max_{u_i \geq 0}\{\ln u_i + \delta V_i(\varepsilon x - \sum_{i=1}^{n} u_i)^{\alpha}\},\ i = 1, \dots, n, \qquad (2.1)$$

Будем искать решение

$$V_i(x) = A_i \ln x + B_i,\ i = 1, \dots, n,$$

а оптимальные управления – в виде $u_i = \gamma_i x, i = 1, \dots, n.$

Так как все игроки здесь идентичны, то из уравнения (2.1) находим оптимальные выловы

$$u_i^N = \frac{1-\alpha\delta}{n-\alpha\delta(n-1)}\varepsilon x \tag{2.2}$$

и выигрыши

$$V_i(x) = \frac{1}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}B_i, \tag{2.3}$$

где

$$B_i = \frac{1}{1-\alpha\delta}\ln\left(\frac{\varepsilon}{n-\alpha\delta(n-1)}\right) + \ln(1-\alpha\delta) + \frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\alpha\delta)\,.$$

Далее обозначим $a = \alpha\delta$.

Динамика популяции в некооперативном случае имеет вид

$$x_t = x_0^{\alpha^t} \widehat{x}^{N \sum\limits_{j=1}^{t} \alpha^j}, \qquad (2.4)$$

где

$$\widehat{x}^N = \frac{\varepsilon a}{n - a(n-1)}.$$

Теперь определим выигрыш каждой коалиции K с k игроками. Предполагаем, что игроки, не входящие в коалицию, используют равновесные по Нэшу стратегии, определенные в (2.2).

Решение уравнения Беллмана для игроков из коалиции K

$$V_K(x) = \max_{u_i \in K}\{\sum_{i \in K} \ln u_i + \delta V_K(\varepsilon x - \sum_{i \in K} u_i - \sum_{i \in N \setminus K} u_i^N)^{\alpha}\}, \quad (2.5)$$

ищем в виде

$$V_K(x) = A_K \ln x + B_K,$$

и оптимальные управления имеют вид $u_i = \gamma_i^K x$, $i \in K$. Так как все игроки в коалиции K идентичны, то из уравнения (2.5) следует, что оптимальный вылов имеет вид

$$u_i^K = \frac{(1-a)(k-a(k-1))}{k(n-a(n-1))}\varepsilon x \qquad (2.6)$$

и тогда выигрыш коалиции

$$V_K(x) = \frac{k}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}B_K, \qquad (2.7)$$

где

$$B_K = \frac{k}{1-a}\ln\left(\frac{\varepsilon(k-a(k-1))}{n-a(n-1)}\right) + k(\ln(1-a) - \ln(k)) + \frac{ka}{1-a}\ln(a)\,.$$

Далее понадобится следующее равенство

$$B_K = kB_i + k(\frac{1}{1-a}\ln(k - a(k-1)) - \ln(k))\,. \tag{2.8}$$

Динамика популяции для данного случая с формировавшейся коалицией K имеет вид

$$x_t = x_0^{\alpha^t}\widehat{x}^{K\sum\limits_{j=1}^{t}\alpha^j}\,, \tag{2.9}$$

где

$$\widehat{x}^K = \frac{\varepsilon a(k - a(k-1))}{n - a(n-1)}\,.$$

Найдем выигрыш и оптимальные стратегии в случае полной кооперации. Из (2.6) и (2.7) получим

$$u_i^I = \frac{(1-a)}{n}\varepsilon x\,, \tag{2.10}$$

$$V_I(x) = \frac{n}{1-\alpha\delta}\ln x + \frac{1}{1-\delta}B_I, \tag{2.11}$$

где

$$B_I = nB_i + n(\frac{1}{1-a}\ln(n-a(n-1)) - \ln(n))\,.$$

Динамическое уравнение при полной кооперации имеет вид

$$x_t = x_0^{\alpha^t}\widehat{x}^{I\sum\limits_{j=1}^{t}\alpha^j}\,,$$

где

$$\widehat{x}^I = \varepsilon a\,.$$

Теорема 2. При кооперативном поведении размер популяции будет больше, чем при некооперативном.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\widehat{x}^I = \varepsilon a > \frac{\varepsilon a}{n - a(n-1)} = \widehat{x}^N\,,$$

но для оптимальных выловов верно обратное неравенство

$$\gamma_i^I = \frac{(1-a)\varepsilon}{n} < \frac{(1-a)\varepsilon}{n - a(n-1)} = \gamma_i^N\,.$$

Теперь найдем характеристическую функцию для игры, начинающейся в момент t в состоянии x

$$V(L,x,t)=\begin{cases}0, & L=0\,,\\ V(\{i\},x,t)=V_i(x), & L=\{i\}\,,\\ V(K,x,t)=V_K(x), & L=K\,,\\ V(I,x,t)=V_I(x), & L=I\,,\end{cases} \tag{2.12}$$

где $V_i(x)$, $V_K(x)$, $V_I(x)$ имеют вид (2.3), (2.7) и (2.11).

Лемма. Для $c>d$ функция $f(z)=\frac{1}{z}\ln\left(\dfrac{1+zc}{1+zd}\right)$ убывает по z.

Теорема 3. Характеристическая функция (2.12) является супераддитивной, т.е.

$$V(K\cup L,x,t)\geq V(K,x,t)+V(L,x,t)\,,\ \ \forall t\,.$$

4. Процедура распределения дележа

В качестве принципа распределения дележа будем использовать вектор Шепли. Тогда кооперативный доход делится среди участников следующим образом

$$\xi_i = \sum_{K \subset N, i \in K} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} [V_{\{K\}} - V_{\{K \backslash i\}}] \,, \; i \in N = \{1, \ldots, n\} \,,$$

где k – число игроков в коалиции K, $V_{\{K\}}$ – выигрыш коалиции K и $V_{\{K\}} - V_{\{K \backslash i\}}$ – вклад игрока i в коалиции K.

Теорема 5. Вектор Шепли в данной игре имеет вид

$$\xi_i(t) = \frac{1}{1-a} \ln x_t + \frac{1}{1-\delta}(B_i + B_\xi) \,, \qquad (2.13)$$

где

$$B_\xi = \frac{1}{1-a}\ln(1+(n-1)(1-a)) - \ln(n) \geq 0\,.$$

Доказательство. Вычислим вклад игрока i в коалиции K:

$$V_K(x_t) - V_{K\setminus i}(x_t) = (A_K - A_{K\setminus i})\ln(x_t) + \frac{1}{1-\delta}(B_K - B_{K\setminus i}) =$$
$$= \frac{1}{1-a}\ln x_t + \frac{1}{1-\delta}B_i + \frac{1}{1-\delta}(k(\frac{1}{1-a}\ln(1+(k-1)(1-a)) - \ln(k)) -$$
$$-(k-1)(\frac{1}{1-a}\ln(1+(k-2)(1-a)) - \ln(k-1)))\,.$$

Данное выражение не зависит от i, отсюда

$$\xi_i(t) = \sum_{K\subset N,\, i\in K} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}[V_K(x_t) - V_{K\setminus i}(x_t)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}[V_K(x_t) - V_{K\setminus i}(x_t)] =$$
$$= \frac{1}{1-a}\ln x_t + \frac{1}{1-\delta}(B_i + \frac{1}{1-a}\ln(1+(n-1)(1-a)) - \ln(n))\,.$$

Теорема 5. Вектор Шепли (2.13) формирует динамически устойчивую процедуру распределения дележа и условие для рационального поведения (1.1) выполняется.

Доказательство. Из теоремы 1 следует

$$\beta_i(t) = \frac{1}{1-a}(\ln x_t - \delta \ln x_{t+1}) + B_i + B_\xi \,.$$

Условие рационального поведения на каждом шаге (1.2) принимает вид

$$\frac{1}{1-a}(\ln x_t - \delta \ln x_{t+1}) + B_i + B_\xi \geq \frac{1}{1-a}(\ln x_t - \delta \ln x_{t+1}) + B_i$$

и оно выполняется, так как $B_\xi \geq 0$.

5. Модель с информированными игроками

Рассмотрим теперь другой сценарий, когда игроки вне коалиции K информируются о формировании коалиции, и затем меняют свои стратегии на новые, которые образуют новое равновесие по Нэшу в игре с $N \backslash K$ игроками.

Разница в вычислении характеристической функции V_K. Действуем как раньше. Для игроков из коалиции K решаем уравнение Беллмана

$$\tilde{V}_K(x) = \max_{u_i \in K} \{ \sum_{i \in K} \ln u_i + \delta \tilde{V}_K (\varepsilon x - \sum_{i \in K} u_i - \sum_{i \in N \backslash K} \tilde{u}_i^N)^{\alpha} \}, \quad (2.14)$$

где $\tilde{u}_i^N$ соответствует решению уравнения Беллмана для игроков вне коалиции K

$$\tilde{V}_i(x) = \max_{\tilde{u}_i \in N \backslash K} \{ \ln \tilde{u}_i + \delta \tilde{V}_i (\varepsilon x - \sum_{i \in K} u_i - \sum_{i \in N \backslash K} \tilde{u}_i)^{\alpha} \}. \qquad (2.15)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде

$$\tilde{V}_K(x) = \tilde{A}_K \ln x + \tilde{B}_K, \ \ \tilde{V}_i(x) = \tilde{A}_i \ln x + \tilde{B}_i \,,$$

и оптимальные управления $u_i = \gamma_i^K x$, $i \in K$ и $\tilde{u}_i = \tilde{\gamma}_i^N x$. Из (2.14) следует, что оптимальные выловы игроков в коалиции K равны

$$\tilde{u}_i^K = \frac{1-a}{k(1+(n-k)(1-a))}\varepsilon x, \tag{2.16}$$

и выигрыш

$$\tilde{V}_K(x) = \frac{k}{1-a} \ln x + \frac{1}{1-\delta}\tilde{B}_K, \tag{2.17}$$

где

$$\tilde{B}_K = k(\frac{1}{1-a} \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+(n-k)(1-a)}\right) + \ln(1-a) + \frac{a}{1-a} \ln(a) - \ln(k)) \,.$$

Отметим нужное для дальнейшего равенство

$$\tilde{B}_K = kB_i + k\Big(\frac{1}{1-a}\ln\Big(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(n-k)(1-a)}\Big) - \ln(k)\Big)\,. \qquad (2.18)$$

Для игроков вне коалиции K оптимальные выловы равны

$$\tilde{u}_i^N = \frac{1-a}{1+(n-k)(1-a)}\varepsilon x$$

и выигрыши

$$\tilde{V}_i(x) = \frac{1}{1-a}\ln x + \frac{1}{1-\delta}\tilde{B}_i,$$

где

$$\tilde{B}_i = \frac{1}{1-a}\ln\Big(\frac{\varepsilon}{1+(n-k)(1-a)}\Big) + \ln(1-a) + \frac{a}{1-a}\ln(a)\,.$$

Соответствующая динамика в случае формирования коалиции K есть

$$x_t = x_0^{\alpha^t} \tilde{x}^{K \sum_{j=1}^{t} \alpha^j},$$

где

$$\tilde{x}^K = \frac{\varepsilon a}{1 + (n-k)(1-a)}.$$

Для гранд-коалиции I оптимальные выловы и выигрыши совпадают с предыдущим сценарием.

Характеристическая функция для игры, начинающейся в момент t в состоянии x имеет вид

$$V(L,x,t) = \begin{cases} 0, & L = 0\,, \\ V(\{i\},x,t) = V_i(x), & L = \{i\}\,, \\ V(K,x,t) = \tilde{V}_K(x), & L = K\,, \\ V(I,x,t) = V_I(x), & L = I\,, \end{cases}$$

где $V_i(x)$, $\tilde{V}_K(x)$, $V_I(x)$ имеют вид (2.3), (2.17) и (2.11), соответственно.

Также, как и в модели без информации определим вектор Шепли и динамически устойчивую процедуру распределения дележа.

Из (2.17) и (2.18) следует

$$\xi_i(t) = \frac{1}{1-a} \ln x_t + \frac{1}{1-\delta}(B_i + B_\xi)\,,$$

где

$$B_\xi = \sum_{K\in N} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\Big[k(\frac{1}{1-a}\ln(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(n-k)(1-a)}) - \ln(k))-$$
$$-(k-1)(\frac{1}{1-a}\ln(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(n-k+1)(1-a)}) - \ln(k-1))\Big] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\Big[k(\frac{1}{1-a}\ln(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(n-k)(1-a)}) - \ln(k))-$$
$$-(k-1)(\frac{1}{1-a}\ln(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(n-k+1)(1-a)}) - \ln(k-1))\Big] =$$
$$= \frac{1}{1-a}\ln(1+(n-1)(1-a)) - \ln(n)\,.$$

Теорема 6. Вектор Шепли определяет динамически устойчивую ПРД и оба выполняется условие рационального поведения.

6. Сравнение сценариев

Теорема 7. Выигрыши свободных игроков во второй модели выше, чем в первой.

Доказательство. Вычислим разность в выигрышах для игроков вне коалиции K:

$$\tilde{V}_i(x) - V_i(x) = \frac{1}{1-\delta}(\tilde{B}_i - B_i) = \frac{1}{(1-\delta)(1-a)} \ln\left(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(n-k)(1-a)}\right) > 0\,.$$

Теорема 8. Выигрыш коалиции K в первой модели выше, чем во второй.

Доказательство. Вычислим разность в выигрышах для игроков в коалиции K:

$$V_K(x) - \tilde{V}_K(x) = \frac{1}{1-\delta}(B_K - \tilde{B}_K) =$$

$$= \frac{k}{(1-\delta)(1-a)} \ln\left(\frac{(1+(n-k)(1-a))(1+(k-1)(1-a))}{1+(n-1)(1-a)}\right) > 0$$

так как

$$\frac{(1+(n-k)(1-a))(1+(k-1)(1-a))}{1+(n-1)(1-a)} - 1 = \frac{(k-1)(1-a)^2(n-k)}{1+(n-1)(1-a)} > 0\,.$$

Теорема 9. В первой модели численность популяции при формировании коалиции больше, чем во второй.

Доказательство. Найдем соответствующую разность:

$$x^K - \tilde{x}^K = \frac{\varepsilon a(k - a(k-1))}{1 + (n-1)(1-a)} - \frac{\varepsilon a}{1 + (n-k)(1-a)} =$$
$$= \frac{(1-a)^2(n-k)(k-1)}{(1+(n-1)(1-a))(1+(n-k)(1-a))} > 0\,.$$

7. C-ядро и метод линейного программирования

Остановимся на другом критерии: C-ядре.

Пусть игра развивается вдоль кооперативной траектории. Покажем, что C-ядро не пусто для каждого $t \geq 0$.

C-ядро определяется условиями

$$\xi_i(t) \geq V_i(x_t)\,,$$
$$\sum_{i \in K} \xi_i(t) \geq V_K(x_t)\,,$$
$$\sum_{i \in N} \xi_i(t) = V_N(x_t)\,.$$

Рассмотрим полученный вектор Шепли

$$\xi_i(t) = \frac{1}{1-a}\ln x_t + \frac{1}{1-\delta}(B_i + \frac{1}{1-a}\ln(1+(n-1)(1-a)) - \ln(n))\,.$$

Очевидно, что

$$\xi_i(t) \geq V_i(t) = \frac{1}{1-a}\ln x_t + \frac{1}{1-\delta}B_i\,.$$

Из леммы следует

$$\sum_{i\in K}\xi_i(t)-V_K(x_t)=$$

$$=\frac{k}{1-a}\ln x_t+\frac{k}{1-\delta}(B_i+\frac{1}{1-a}\ln(1+(n-1)(1-a))-\ln n)-$$

$$-\frac{k}{1-a}\ln x_t+\frac{k}{1-\delta}(B_i+\frac{1}{1-a}\ln(1+(k-1)(1-a))-\ln k)=$$

$$=\frac{k}{1-a}\ln\left(\frac{1+(n-1)(1-a)}{1+(k-1)(1-a)}\right)-\ln\left(\frac{n}{k}\right)\geq 0\,.$$

$$\sum_{i\in N}\xi_i(t)=\frac{n}{1-a}\ln x_t+\frac{n}{1-\delta}(B_i+\frac{1}{1-a}\ln(1+(n-1)(1-a))-\ln(n))=V_N(x_t)\,.$$

Таким образом, вектор Шепли лежит в C-ядре. Кроме того, на каждом шаге выполняются условия рационального поведения

$$\xi_i(t)-\delta\xi_i(t+1)\geq V_i(x_t)-\delta V_i(x_{t+1})\,.$$

Выше мы отмечали, что наше решение дает ПРД одинаковую для всех игроков.

$$\beta_i(t) = \frac{1}{1-a}(\ln x_t - \delta \ln x_{t+1}) + B_i + B_\xi \, .$$

Если нужно сдвинуться из центра C-ядра, можно использовать методы линейного программирования

$$\xi_i(t) \geq V_i(x_t) \, ,$$
$$\sum_{i \in K} \xi_i(t) \geq V_K(x_t) \, ,$$
$$\sum_{i \in N} \xi_i(t) = V_N(x_t) \, ,$$
$$\xi_i(t) - \delta \xi_i(t+1) \geq V_i(x_t) - \delta V_i(x_{t+1}) \, .$$

для любой функции времени.

Например, можно рассмотреть следующие функции

$$\sum_{t=0}^{T} \beta_1(t) \longrightarrow \max .$$

Можно интерпретировать это следующим образом: среди идентичных игроков есть лидер (игрок 1) которому нужно платить больше чем другим из кооперативного выигрыша и при этом условия рационального поведения выполняются.