Estimating thermal diffusivity of soil via an inverse problem solution

Alexey V. Penenko

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS

e-mail:aleks@ommgp.sscc.ru

July 2010

Inverse problem on soil thermodiffusivity coefficient (TDC) reconstruction

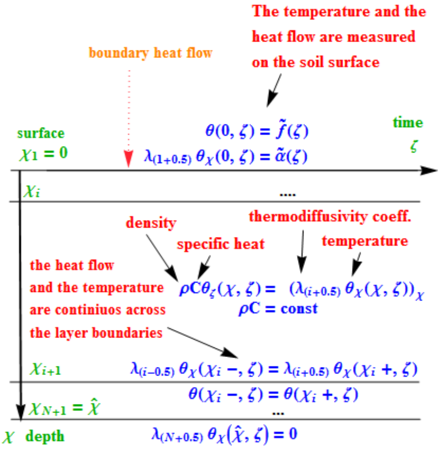


Fig. 1: Given $\tilde{f}$, $\tilde{\alpha}$. Estimate the TDC $\kappa = \frac{\lambda}{\rho C}$

The outline

The data available could be not enough to reconstruct the coefficient in details so one has to estimate how much he is able to reconstruct.

- The model of process is a boundary value problem for the heat conduction equation in a layered medium.
- A set of model sensitivity functions are aggregated to a sensitivity operator.
- The sensitivity operator is calculated with he help of discrete-analytical schemes.
- The analysis of sensitivity operator singular value decomposition allows to estimate the amount of information available on the unknown coefficient.

Coefficient reconstruction result

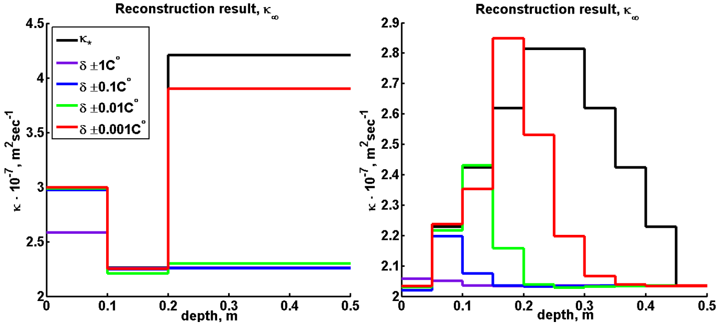
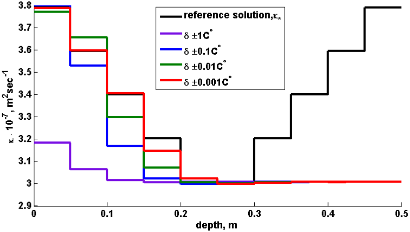


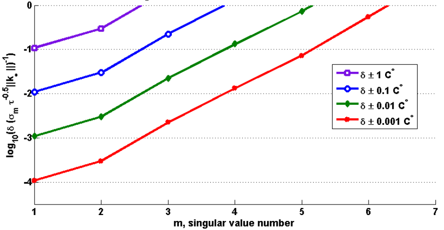
Fig. 2 Reconstruction results for a soil TDC κ_* with respect to accuracy δ of temperature measurements on the surface for two model soils

Measurement data informativeness estimate

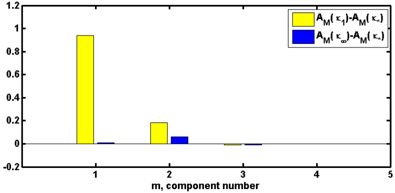
TDC reconstruction results, κ_∞, wrt noise level in the data



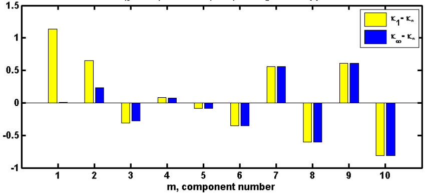
Logaritm of the relative coefficient change in the direction of the m-th right singular vector of the sensitivity operator that is indistingushable from noise with the surface measurements



The inverse problem descrepancy decomposition wrt left singular vectors of the sensitivity operator for measurement data accuracy $\delta = \pm\ 0.1\ C^\circ$, before (yellow) and after (blue) the algorithm application



The inverse problem error decomposition wrt right singular vectors of the sensitivity operator for measurement data accuracy $\delta = \pm\ 0.1\ C^\circ$, before (yellow) and after (blue) the algorithm application



Conclusions

- The following factors influence the accuracy of coefficient reconstruction by means of gradient methods:
  - measurement data error,
  - gradient calculation error,
  - error in an *a priori* solution structure specification,
  - sensitivity operator singular spectrum decay rate.
- The use of precise and consistent numerical schemes is of importance because the inaccuracies imposed by the numerical scheme can considerably influence the inverse problem solution algorithm convergence.
- The analysis of the sensitivity operator singular spectrum allows to infer on the amount of information to be extracted form the available measurement data with the help of model chosen.

Thank you for your attention!

References I

- Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Козлов А.И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений —М :ЛКИ, 2007.— 192 с.
- Carpentier O., Defer D., Antczak E., Chauchois A., Duthoit B. In situ thermal properties characterization using frequential methods. *Energy and Buildings*, V.40, 2008. pp 300-307.
- Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. —М: Наука, 1973.— 408 с.
- Hasanov A., DuChateau P., Pektas B. An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation *// Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. - 2006. T. 14 № 4. - C. 1-29.

References II

- Isakov V., Kindermann S. Identification of the diffusion coefficient in a one-dimensional parabolic equation // Inverse problems. - 2000. T. 16. - C. 665-680.
- Hao D.N., Methods for inverse heat conduction problems -Frankfurt/Main :Peter Lang Pub. Inc., 1998. - 249 c.
- Iglesias, M.A., Dawson C. An iterative representer-based scheme for data inversion in reservoir modeling // Inverse Problems. - 2009. T. 25. - C. 1-34.
- Кабанихин С.И., Хасанов А., Пененко А.В. Метод градиентного типа для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // СибЖВМ / СО РАН. - 2008. № 1. Т. 11 - С. 41-54.

References III

- Пененко В.В. Вычислительные вопросы динамики атмосферных процессов и оценка влияния различных факторов на динамику атмосферы в зб. Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики под редакцией Лаврентьева М.М. —Новосибирск: Наука, 1975. С. 61-77.
- Hoang N. S., Ramm A. G. An inverse problem for a heat equation with piecewise-constant thermal conductivity // J. Math. Phys. - 2009. № 6. T. 50 C. 063512.
- Penenko V.V., Tsvetova E.A. Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // Journal of Computational and Applied Mathematics - 2009. T. 226 C. 319-330.
- Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана —Ленинград: Гидрометеоиздат, 1974.— 303 с.

References IV

- Lishang J., Youshan T. Identifying the volatility of underlying assets from option prices // Inverse problems - 2001. T. 17 C. 137-155.
- Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Козлов А.И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений —М :ЛКИ, 2007.— 192 с.
- Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена—М: Наука, 1988.— 288 с.
- Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. —М :Наука, 1976.— 391 с.

References V

- Klibanov M.V., Timonov A.A. Carleman esitmates for coefficient inverse problems and numerical applications. —Boston :Utrecht, 2004.— 282 с.
- Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Докл. АН СССР. Нов. сер. - 1950. № 2. Т. 73 - С. 295-297.
- El-Mistikawy T.M., Werle M.J. Numerical method for boundary layers with blowing - The exponential box scheme // AIAA J. - 1978. Т. 16 - С. 749-751.
- Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач, —Новосибирск:Издательство НГУ, 2001.— 315 с.

References VI

- Камынин Л.И. О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1964. Т. 28 Вып. 4 С. 721-744.
- Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем —М: Наука, 1971.— 553 с.
- Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными —М: Мир, 1972.— 414 с.
- Денисов А.М. Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1982. № 4 Т. 22. С. 858–864.

References VII

- Матвеев, Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы, —Ленинград:Гидрометеорологическое издательство, 1965.— 876 с.
- Рысбайулы Б., Исмайлов А. О. Определение коэффициента теплопроводности однородного грунта в процессе промерзаний // Докл. НАН РК. - 2008. № 2. - С. 26-28.
- Костин В. И., Хайдуков В. Г., Чеверда, В. А. Обращение волновых полей для данных систем многократного перекрытия (линеаризованная постановка) // Докл. РАН - 1997. № 2. Т. 352 - С. 683–686.
- Карчевский А. Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. - 2008. № 2. Т. 11 - С. 139–150.