

Численное исследование прямого вариационного алгоритма усвоения данных и изучение зависимости от параметра сглаживания в городских условиях

МУКАТОВА ЖАДЫРА САМАТОВНА, СТУДЕНТКА ММФ НГУ
НАУЧНЫЕ РУКОВОДИТЕЛИ: ПЕНЕНКО В.В., ПЕНЕНКО А.В., ИВМИМГ СО РАН

Цель работы

- В [1] был представлен прямой алгоритм усвоения контактных измерений для моделей адвекции-диффузии. В качестве стабилизатора использовалась норма управляющей функции.
- В [2] разработан прямой алгоритм вариационного усвоения данных со стабилизатором в целевом функционале, регулирующим величину нормы производной функции неопределенности.
Такой стабилизатор позволяет получать менее локализованные решения, но согласующиеся с данными измерений.
- Изучить оценку эффективности применения прямого алгоритма вариационного усвоения данных со стабилизаторами, включающими как норму самой функции управления, так и норму ее пространственной производной в реалистичном сценарии для города Новосибирска.

1. Пененко А.В., Пененко В.В. Прямой метод вариационного усвоения данных для моделей конвекции-диффузии на основе схемы расщепления // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, С. 69-83.

2. Penenko A., Penenko V., Mukatova Z. Direct data assimilation algorithms for advection-diffusion models with the increased smoothness of the uncertainty functions // 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, 2017. P. 126-130.

Задачи усвоения данных

Усвоение данных на основе совместного использования моделей физических процессов и данных измерений – решение последовательности связанных обратных задач с поступающими в процессе работы алгоритма данными.

Математическая модель

Результаты измерений



Уточнение оценки состояния
изучаемой системы, позволяющее
улучшить прогноз погоды и качества
атмосферного воздуха (газовый и
аэрозольный состав)

Изучаемая модель

Рассмотрим модель переноса примесей в атмосфере

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi(\vec{x}, t)\vec{u}(\vec{x}, t) - \mu(\vec{x}, t)\operatorname{grad} \varphi(\vec{x}, t)) = f(\vec{x}, t) + r(\vec{x}, t), \quad (\vec{x}, t) \in D \times (0, T), \quad (1)-(2)$$

$$\mu(\vec{x}, t) \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (\vec{x}, t) \in \Gamma_{out}, \quad \varphi(\vec{x}, t) = \varphi_b(\vec{x}, t), \quad (\vec{x}, t) \in \Gamma_{in}, \quad \varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D, \quad t = 0.$$

φ – концентрация примеси

\vec{u} – вектор скоростей ветра

μ – коэффициент диффузии

φ_b – фоновые значения

концентраций

φ_0 – начальные распределения

концентраций

f – мощность источника примесей

r – функция управления

$D = (0, X) \times (0, Y)$ – прямоугольная область в пространстве ($X, Y > 0$)

Γ_{out} – часть границы области на которой скорость ветра направлена наружу из области

Γ_{in} – часть границы, на которой скорость ветра направлена внутрь области

Постановка задачи

В прямой задаче требуется найти φ по известным $\mu, \vec{u}, \varphi_0, \varphi_b, f, r$ из (1)-(2)

Зашумленные значения $\bar{\varphi}$ измеряются в M точках пространства и времени

$$\left\{ (\chi_m, \theta_m) \right\}_{m=1}^M \subset D \times [0, T]:$$

$$I_m = \bar{\varphi}(\chi_m, \theta_m) + \zeta_m, \quad m = 1, \dots, M \quad (3)$$

ζ_m - возмущение m -го результата измерений

В задаче усвоения данных заданы $\mu, \vec{u}, \varphi_0, \varphi_b, f$, и доступны данные измерений I_m в моменты, предшествующие некоторому $t^* \in (0, T)$.

По этой информации $\bar{\varphi}$ должно быть найдено из (1)-(3) для всего интервала $(0, T)$.

Алгоритм решения

Определим в области временную и пространственные сетки:

$$\omega_T = \left\{ \left\{ t^k \right\}_{k=1}^{N_t} \mid 0 = t^1 < \dots < t^k < \dots < t^{N_t} = T \right\},$$

$$\omega_X = \left\{ \left\{ x_i \right\}_{i=1}^N \mid 0 = x_1 < \dots < x_i < \dots < x_N = X \right\}, \quad \omega_Y = \left\{ \left\{ y_j \right\}_{j=1}^N \mid 0 = y_1 < \dots < y_j < \dots < y_N = Y \right\}.$$

Рассмотрим неявную схему, аппроксимирующую краевую задачу (1)-(2) и аддитивную схему расщепления по пространственным переменным

$$\vec{\phi}^k = \left\{ \phi_0(x_i, y_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad k = 1,$$

$$\gamma_\xi \frac{\vec{\phi}_\xi^k - \vec{\phi}^{k-1}}{\Delta t} = \Lambda_\xi^k \vec{\phi}_\xi^k + \vec{F}_\xi^k + \vec{r}_\xi^k, \quad k = 2, \dots, N_t, \quad \xi \in \Xi, \quad (4)$$

$$\phi^k = \sum_{\xi \in \Xi} \gamma_\xi \phi_\xi^k, \quad \sum_{\xi \in \Xi} \gamma_\xi = 1, \quad \gamma_\xi \geq 0, \quad \Xi = \{x, y\}$$

Точки проведения измерений совпадают с точками сетки $\left\{ (x_m, \theta_m) \right\}_{m=1}^M \subset \omega_X \times \omega_Y \times \omega_T$

Алгоритм решения

В качестве решения задачи вариационного усвоения данных для шага по времени k и стадии расщепления вдоль оси x будем рассматривать минимум целевых функционалов при $j = 1, \dots, N$

$$J_{xj}^k \left((\phi_x)_{.j}^k, \vec{r} \right) = \left(\sigma \sum_{i=1}^N \left((\phi_x)_{ij}^k - I_{ij}^k \right)^2 H_{ij}^k + \rho \sum_{i=1}^N \left((r_x)_{ij}^k \right)^2 + \eta \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{(r_x)_{ij}^k - (r_x)_{i+1j}^k}{\Delta x} \right)^2 \right) \Delta t, \quad (5)$$

H_{ij}^k – маска наблюдательной системы: в точке наблюдения $\{(\chi_m, \theta_m)\}_{m=1}^M \subset \omega_X \times \omega_Y \times \omega_T$

она равна 1, и 0 на оставшейся части области $\omega_X \times \omega_Y \times \omega_T$

Выражение (4) сводится к трехдиагональной численной схеме:

$$-L_i \phi_{i-1}^k + C_i \phi_i^k - R_i \phi_{i+1}^k = \phi_i^{k-1} + \Delta t F_i^k + \Delta t r_i^k, \quad i = 1, \dots, N,$$

Алгоритм решения

Условный минимум функционала (5) на ограничениях (4) вычисляется при решении матричной системы

$$-\bar{L}_i \Phi_{i-1} + \bar{C}_i \Phi_i - \bar{R}_i \Phi_{i+1} = \bar{F}_i, \quad i=1, \dots, N,$$

$$\bar{R}_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} R_i & 0 & 0 \\ 0 & L_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\eta\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}, & i=1, \dots, N-1, \\ 0, & i=N, \end{cases} \quad \bar{L}_i = \begin{cases} 0, & i=1, \\ \begin{pmatrix} L_i & 0 & 0 \\ 0 & R_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\eta\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}, & i=2, \dots, N, \end{cases} \quad \bar{C}_i = \begin{pmatrix} C_i & 0 & -\tau \\ 2\sigma H_i^k \Delta t & C_i & 0 \\ 0 & -1 & 2\rho\Delta t + \frac{2\eta\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, N\}$$

$$\bar{C}_i = \begin{pmatrix} C_i & 0 & -\tau \\ 2\sigma H_i^k \Delta t & C_i & 0 \\ 0 & -1 & 2\rho\Delta t + \frac{4\eta\Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix}, \quad i=2, \dots, N-1, \quad \bar{F}_i = \begin{pmatrix} \phi_i^{k-1} + \Delta t F_i^k \\ 2\sigma H_i^k I_i^k \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^k \\ \psi_i \\ r_i^k \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, N,$$

Численные эксперименты

$r(x, t)$ – функция управления в модели

$\xi(x)$ – функция управления в начальных данных

При решении прямой задачи $\varphi_0(x) = 0$, $r(x, t) = 0$, $\xi(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right)$

При решении задачи усвоения данных $r(x, t)$ неизвестно, $\xi(x) = 0$.

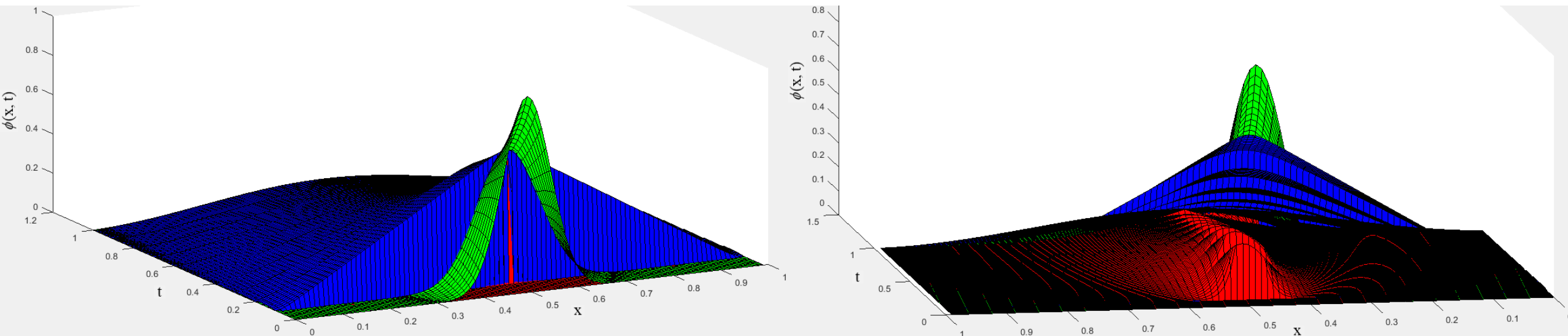


Рис. 1. «Точное решение» (зеленый), результат 1-го алгоритма (красный), результат 2-го алгоритма (синий) с параметрами $a = 0.05$, $b = 0.5$

Численные эксперименты

$r(x, t)$ – функция управления в модели

$\xi(x)$ – функция управления в начальных данных

При решении прямой задачи $\varphi_0(x) = 0$, $r(x, t) = 0$, $\xi(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right)$

При решении задачи усвоения данных $r(x, t)$ неизвестно, $\xi(x) = 0$.

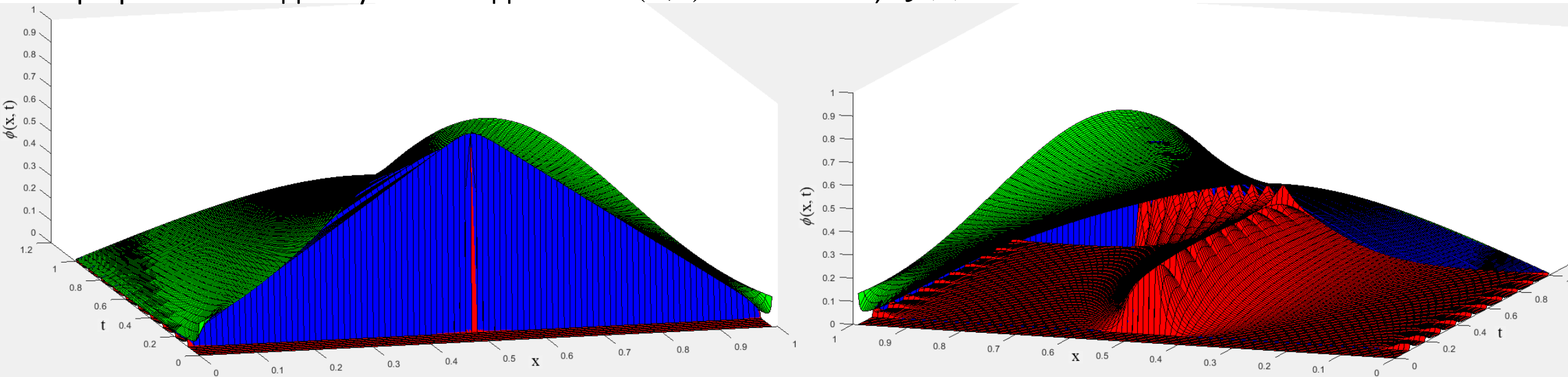
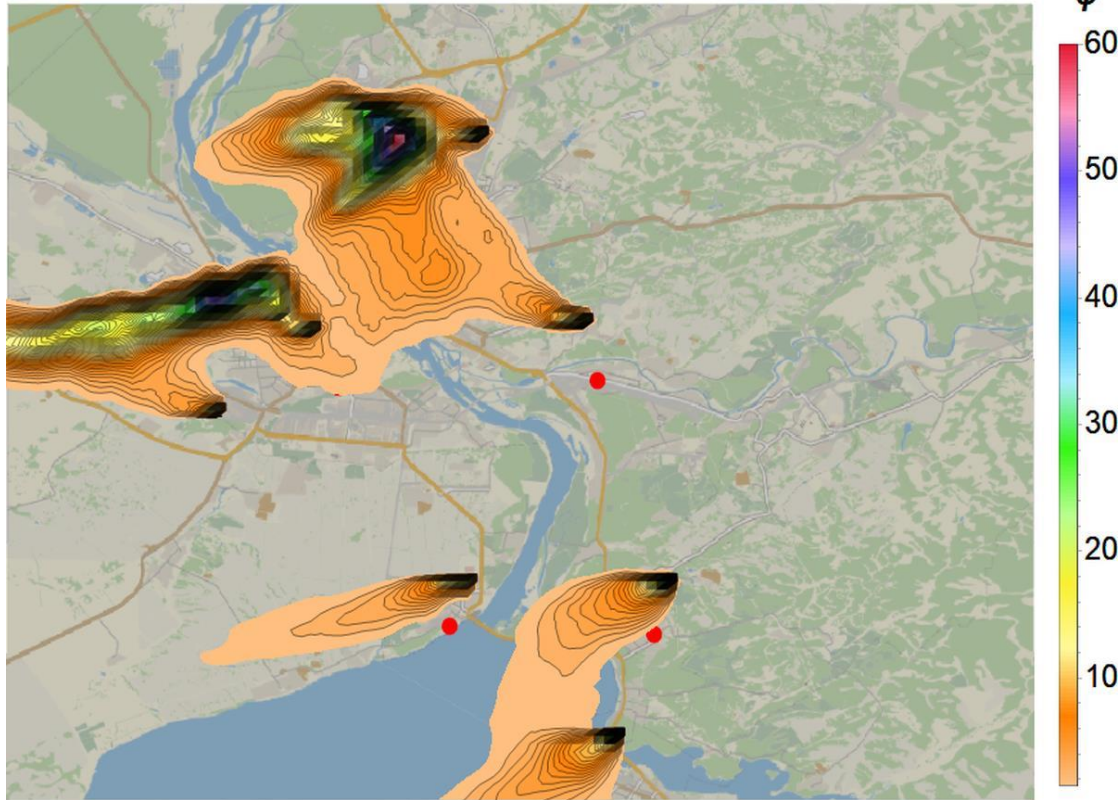


Рис. 2. «Точное решение» (зеленый), результат 1-го алгоритма (красный), результат 2-го алгоритма (синий) с параметрами $a = 0.25$, $b = 0.5$

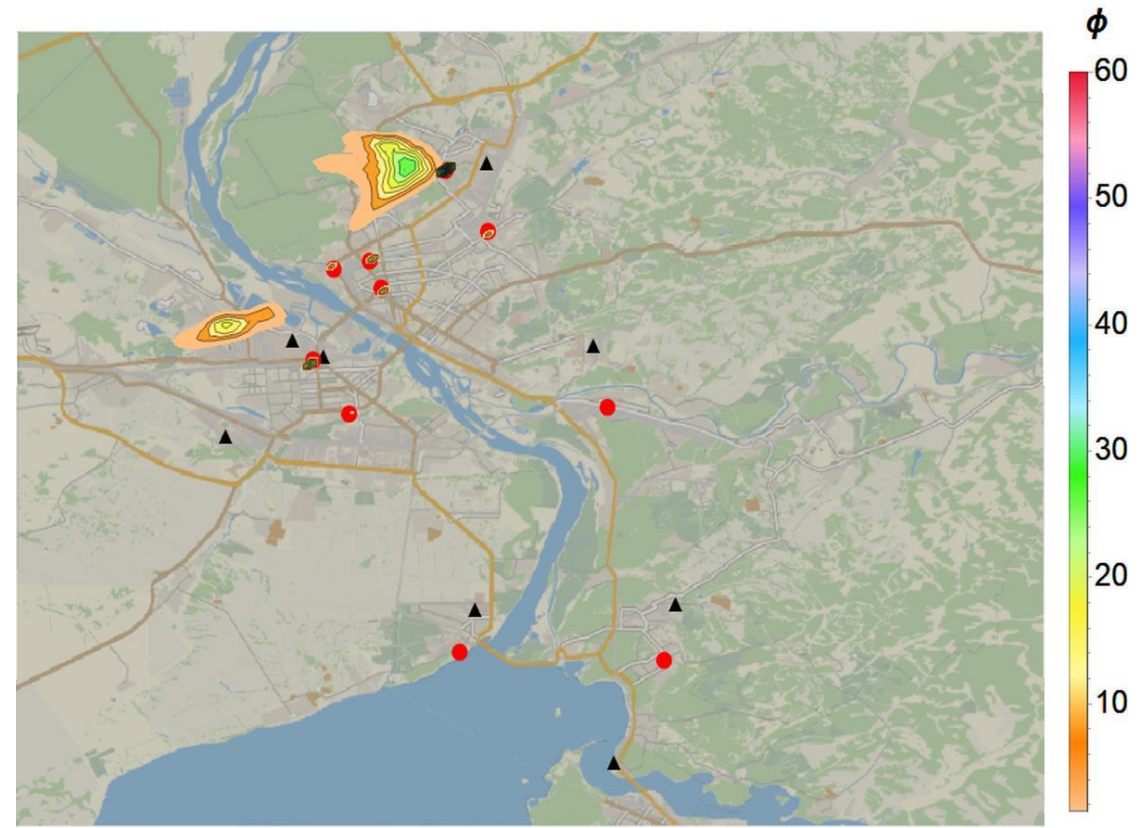
Численные эксперименты

$t=Ns [11.6667, 2]$ ч. точное решение



(a)

$t=Ns [11.6667, 2]$ ч. $\rho=10, \eta=0$

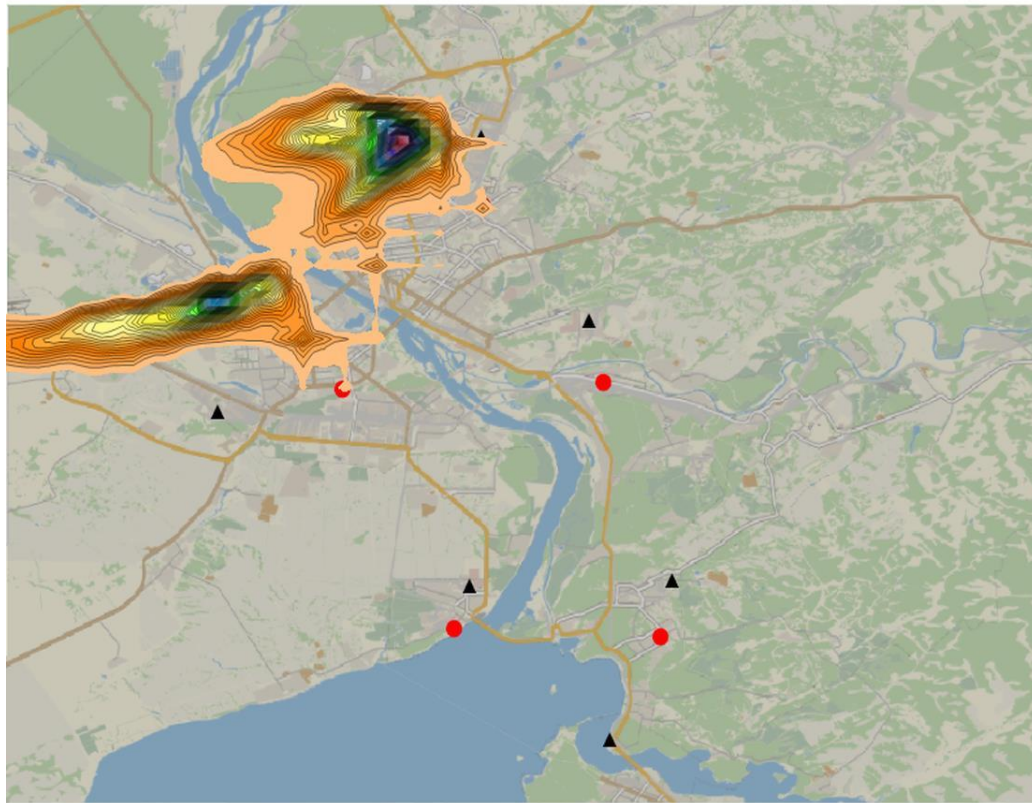


(б)

Рис. 3. Результаты восстановления поля концентрации (точное решение представлено на графике (a)) при различных значениях параметров регуляризации (б)-(г) в заданный момент времени, когда проводилось усвоение данных измерений.

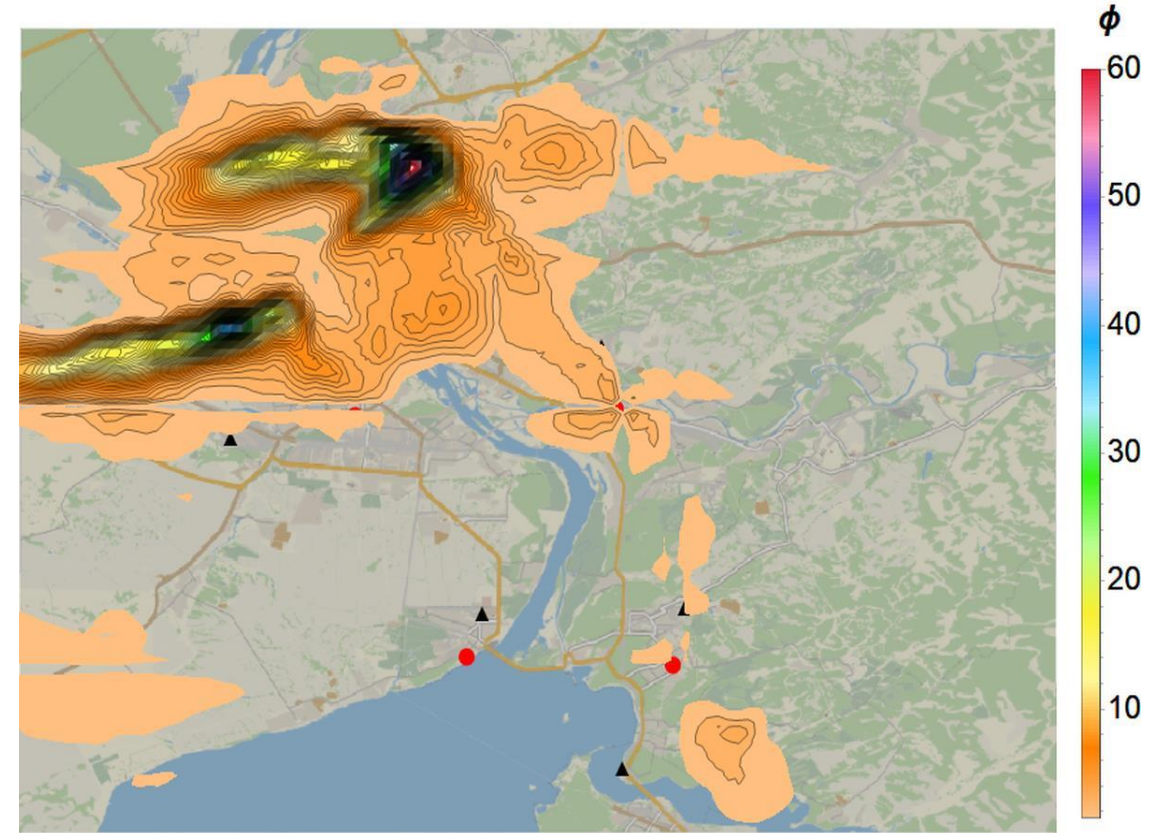
Численные эксперименты

$t=Ns [11.6667, 2]$ ч. $\rho=10^{-6}$, $\eta=10$



(б)

$t=Ns [11.6667, 2]$ ч. $\rho=0$, $\eta=10$



(г)

Рис. 3. Результаты восстановления поля концентрации (точное решение представлено на графике (а)) при различных значениях параметров регуляризации (б)-(г) в заданный момент времени, когда проводилось усвоение данных измерений.

Численные эксперименты

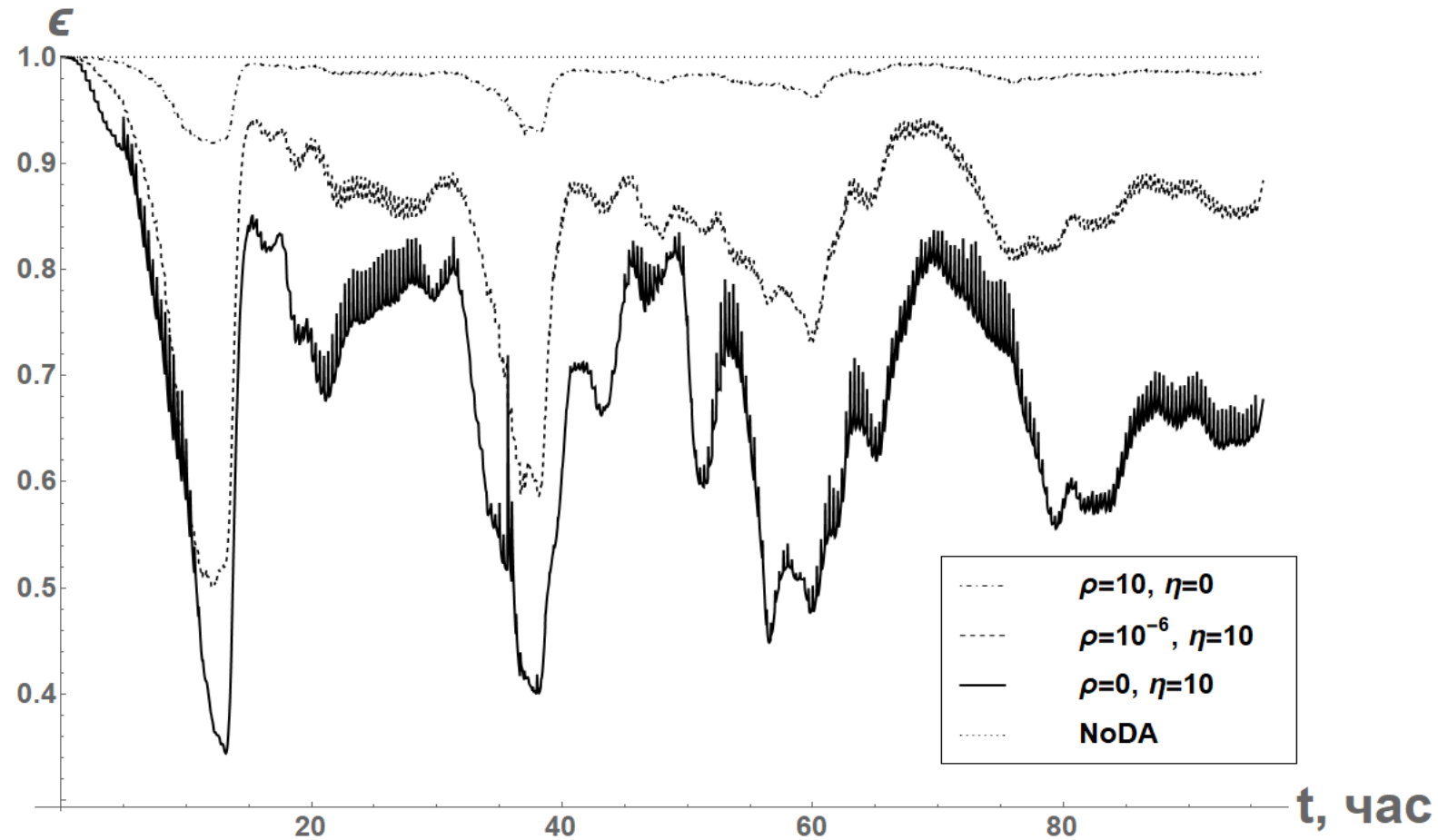


Рис. 4. Относительная ошибка восстановления поля концентрации в зависимости от времени для различных значений параметров регуляризации.

Выводы

- Разработан алгоритм с минимизацией в составе целевого функционала пространственной производной функции неопределенности (управления), за счет которой и производится усвоение данных
- Изучена эффективность прямого алгоритма вариационного усвоения данных с квази-независимым усвоением данных на реалистичном сценарии оценки загрязнения атмосферы г. Новосибирска по данным системы мониторинга
- Увеличена гладкость восстановленных функций неопределенности (управления), что положительно повлияло на качество восстановления в рассмотренном сценарии.

1. Penenko A., Penenko V., Mukatova Z. Direct data assimilation algorithms for advection-diffusion models with the increased smoothness of the uncertainty functions // 2017 International Multi Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, 2017. P. 126-130.
2. Пененко А.В., Мукатова Ж.С., Пененко В.В., Гочаков А.В., Антохин П.Н. Численное исследование прямого вариационного алгоритма усвоения данных в городских условиях. // Оптика атмосферы и океана. 2018. Т. 31. № 06. С. 456–462.
3. Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2018: Математика / Новосибир. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.
4. Пененко А.В., Пененко В.В. Прямой метод вариационного усвоения данных для моделей конвекции-диффузии на основе схемы расщепления // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, С. 69-83.
5. А. В. Пененко, В. В. Пененко, Е. А. Цветова “Последовательные алгоритмы усвоения данных в моделях мониторинга качества атмосферы на базе вариационного принципа со слабыми ограничениями”, Сиб. журн. вычисл. матем., 19:4 (2016), 401–418; Num. Anal. Appl., 9:4 (2016), 312–325
6. В. В. Пененко, А. В. Пененко, Е. А. Цветова Вариационный подход к исследованию процессов геофизической гидротермодинамики с усвоением данных наблюдений // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 5 (345). С. 17-25.